
Mathematik für Technische Gymnasien und
Berufliche Oberschulen
Band 1

Karl-Heinz Pfeffer · Thomas Zipsner

Mathematik für Technische Gymnasien und Berufliche Oberschulen Band 1

Analysis



Springer Vieweg

Karl-Heinz Pfeffer

Thomas Zipsner
Essenheim, Deutschland

ISBN 978-3-658-09264-1
DOI 10.1007/978-3-658-09265-8

ISBN 978-3-658-09265-8 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Es war für mich eine große Ehre, als Frau Pfeffer mir die verantwortliche Überarbeitung des Lehrbuchs Ihres verstorbenen Mannes übertragen und anvertraut hat. Diese Aufgabe habe ich gerne angenommen. Als erster Band erscheint nun der Band Analysis.

Vieles wird der Leser im Buch nicht mehr vorfinden. Vor allem die eher streng mathematischen Abhandlungen und Abschnitte wurden bewusst zu Gunsten einer kurzen und prägnanten und eher „anwendungsorientierten“ Darstellung herausgenommen. Etliche weiterführende Aufgaben finden sich jetzt als Zusatznutzen für den geneigten Leser im Internet beim Buch. Auch der Text wurde gestrafft und zum Teil umformuliert. Das ehemalige Kapitel Vertiefung der Differential- und Integralrechnung wurde in die entsprechenden verbleibenden sechs Kapitel integriert.

Ich hoffe, dass dies alles dazu beiträgt, den Nutzen für den Lernenden zu erhöhen und die Qualität des Lehrbuchs auf dem bekannten Niveau zu halten.

Für Anregungen und konstruktive Hinweise bin ich jederzeit dankbar. Diese können unter thomas.zipsner@springer.com erfolgen.

April 2015

Thomas Zipsner

Vorwort zur 8. Auflage

Analysis für technische Oberschulen ist das Nachfolgewerk der seit 1981 aufgelegten „Analysis für Fachoberschulen“, ergänzt durch Elemente der analytischen Geometrie und Grundlagen zum Rechnen mit komplexen Zahlen. Es ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für Lernende an Fach- und Berufsoberschulen sowie an Fachgymnasien und für Studierende an Fachhochschulen im Erstsemester, ausgerichtet auf die Fachrichtung Technik.

Die spezifisch technische Akzentuierung der Inhalte ist dabei so behutsam erfolgt, dass innermathematische Problemstellungen nicht zu kurz kommen und eine Verwendung des Buches in beruflichen Oberschulen nichttechnischer Fachrichtungen ebenfalls gut möglich ist.

Es berücksichtigt in besonderem Maße unterschiedliche mathematische Vorkenntnisse, indem wiederholende Thematik angeboten wird, die je nach Bedarf mehr oder weniger selbstständig von den Nutzern erarbeitet werden kann.

Der didaktische Leitgedanke dieses Buches beinhaltet, *grundlegende* Kenntnisse über Funktionen zu vermitteln, ohne dabei die Theorie überzubewerten. Dazu gehört es, hinführend zu den klassischen Methoden der Analysis auch die hierfür wesentlichen elementaren Rechentechniken und geometrischen Denkweisen bereitzustellen und einzuüben.

Das geschieht zunächst durch bewusst breit angelegte Überlegungen zu den linearen und quadratischen Funktionen, an die sich die einschlägigen Nullstellenermittlungen ganzrationaler Funktionen höheren Grades anschließen. Abgerundet wird die elementare Funktionenlehre durch Betrachtung der trigonometrischen Grundfunktionen und mündet ein in die Erarbeitung der allgemeinen Sinusfunktion.

Dieser Einstieg in die Analysis, je nach Lerngruppe und Lernintention abkürzbar, hat den Vorteil, dass nach der sich anschließenden optionalen Erarbeitung des Grenzwertbegriffes über Folgen bzw. über Funktionen den Lernenden die Problemstellungen der Differential- und der Integralrechnung durchsichtiger erscheinen: Grundsätzliche Vorgehensweisen werden wieder aufgegriffen (Wiederholungseffekt!) und gemäß Spiralprinzips in erweitertem Zusammenhang angewandt.

Besonders erwähnenswert ist, dass die Integralrechnung nicht über Ober- und Untersummenermittlung, sondern anschaulich-direkt über Flächeninhaltsfunktionen eingeführt wird.

Neu ist der Einbezug von Elementen der Analytischen Geometrie und grundlegender Ausführungen zum Rechnen mit komplexen Zahlen; auf „Nahtstellen“ zur *Analysis* wird bewusst hingewiesen.

Viele Beispielaufgaben mit Lösungen erleichtern das selbstständige Einüben des Stoffes. Das umfangreiche, zum großen Teil ganzheitlich-anwendungsbezogene Aufgabenmaterial ermöglicht handlungsorientierte Unterrichtsansätze, schülerorientierte Übungsphasen und intensive Vorbereitung auf Lernkontrollen. Die Aufgabenanordnung ist innerhalb derselben Thematik weitmöglichst im Sinne einer methodischen Reihe schwierigkeitsgraddifferenziert erfolgt; besonders schwierige Aufgaben sind *kursiv* gekennzeichnet.

Die mit * versehenen Inhalte dienen der Abrundung. Sie können ohne Einfluss auf das weitere Vorgehen auch weggelassen werden. – Im Unterricht bieten sie sich durchaus als Themen für Referate an.

Meinen Kolleginnen und Kollegen danke ich für die über die Jahre hinweg erfolgten hilfreichen Anregungen und Bestätigungen, meiner Ehefrau Gertrud Annedore für unermüdliches Korrekturlesen.

Besonderer Dank gilt Herrn Thomas Zipsner aus dem Lektorat des Vieweg+Teubner Verlages für konstruktive Hinweise und kritische Sichtung des Manuskriptes.

Hannover, im Februar 2010

Karl-Heinz Pfeffer

Mathematische Zeichen und Begriffe

Logik

$:=$	<i>definitionsgemäß gleich</i>
\wedge	<i>und (im Sinne von sowohl ... als auch)</i>
\vee	<i>oder</i>
\Rightarrow	<i>daraus folgt; wenn ..., dann</i>
\Leftrightarrow	<i>äquivalent (gleichwertig); genau dann ..., wenn ($p \Leftrightarrow q$: aus p folgt q und umgekehrt)</i>

Relationen zwischen Zahlen

$a = b$	a gleich b
$a \neq b$	a ungleich b
$a < b$	a kleiner b
$a > b$	a größer b
$a \leq b$	a kleiner oder gleich b
$a \geq b$	a größer oder gleich b
$a \approx b$	a ungefähr gleich b

Mengen

$A, B, C, \dots, M, N, \dots$	Mengen
$a \in M$ ($M \ni a$)	a ist Element von M (M enthält a)
$a \notin M$	a ist nicht Element von M
$\{a, b, c, d\}$	Menge mit den Elementen a, b, c und d
$\{x \mid \dots\}$	Menge aller x , für die gilt ...
$\{x \mid \dots\}_M$	Menge aller $x \in M$, für die gilt ...
$\{\}$	leere Menge
$A = B$	A gleich B , d. h. $x \in A \Leftrightarrow x \in B$

$A \subset B$ ($B \supset A$)	A ist (echte) Teilmenge von B : $x \in A \Rightarrow x \in B$ und $A \neq B$ (B ist (echte) Obermenge von A)
$A \subseteq B$	A ist echte oder unechte Teilmenge von B (d. h. $A \subset B$ oder $A = B$)
$A \not\subseteq B$	A ist nicht Teilmenge von B
$A \cap B := \{x x \in A \wedge x \in B\}$	Schnittmenge (Durchschnitt) von A und B
$A \cup B := \{x x \in A \vee x \in B\}$	Vereinigungsmenge von A und B

Charakteristische Mengen

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen mit 0
$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne 0
$\mathbb{Z} := \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	Menge der ganzen Zahlen ohne 0
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z}^*\}$	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	Menge der positiven reellen Zahlen einschl. 0
$\mathbb{R}^- := \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_0^+$	Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Menge der reellen Zahlen ohne 0
$\mathbb{C} := \{z z = x + iy \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$	Menge der komplexen Zahlen
$[a; b] := \{x a \leq x \leq b\}_{\mathbb{R}}$	geschlossenes Intervall
$]a; b[:= \{x a < x < b\}_{\mathbb{R}}$	offenes Intervall
$[a; b[:= \{x a \leq x < b\}_{\mathbb{R}}$	halboffenes Intervall
$]a; b] := \{x a < x \leq b\}_{\mathbb{R}}$	halboffenes Intervall
$ x := \begin{cases} +x & \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ -x & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$	<i>Betrag</i> einer (reellen) Zahl x

Funktionen

\rightarrow	Zahlen- und Mengenzuordnungspfeil
f (auch g oder h)	<i>Funktion</i>
$f : x \rightarrow f(x)$	Funktionsvorschrift
$f(x)$	Funktionswert (Bild von x); aber auch Funktionsterm
$y = f(x)$	Funktionsgleichung
$P(x y)$	Punkt der x, y -Ebene: \mathbb{R}^2 -Ebene
\equiv	Identitätszeichen („ist identisch gleich“); z. B. Gerade $g \equiv y = 2x - 1$

$$f \circ g \text{ (} g \circ f \text{)}$$

Verknüpfungszeichen für verkettete Funktionen
(f nach g bzw. g nach f)

$$f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$$

1., 2., 3., ..., n -te Ableitungsfunktion von f

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

bestimmtes Integral der Funktion f über $[a; b]$

$$\int f(x) \, dx$$

unbestimmtes Integral der Funktion f

$$F(x) = \int f(x) \, dx$$

Stammfunktionen von f mit $F'(x) = f(x)$

Weitere Zeichen

$$(a_n)$$

Folge mit den Gliedern $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

Summationssymbol: $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$

$$\infty$$

unendlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Grenzwert einer Folge für n gegen ∞

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Grenzwert einer Funktion f für x gegen x_0

Inhaltsverzeichnis

1	Von den natürlichen zu den reellen Zahlen	1
1.1	Grundeigenschaften	1
1.2	Lagebeziehungen reeller Zahlen	4
1.3	Das Rechnen in \mathbb{R}	6
1.3.1	Grundlagenwiederholung	6
2	Funktionen	21
2.1	Grundlagen	21
2.1.1	Die \mathbb{R}^2 -Ebene	21
2.1.2	Funktionen	22
2.2	Elementare Funktionen	26
2.2.1	Lineare Funktionen	26
2.2.2	Quadratische Funktionen	48
2.3	Ganzrationale Funktionen	68
2.3.1	Reine Potenzfunktionen	68
2.3.2	Ganzrationale Funktionen als verknüpfte Potenzfunktionen	70
2.3.3	Nullstellen ganzrationaler Funktionen	72
2.4	Wurzelfunktionen	76
2.4.1	Umkehrfunktionen (Umkehrrelationen)	76
2.5	Trigonometrische Funktionen (Kreisfunktionen)	81
2.5.1	Die Eigenschaften der trigonometrischen Grundfunktionen	81
2.5.2	Die allgemeine Sinusfunktion	89
3	Folgen und Reihen	95
3.1	Grundlagen	95
3.1.1	Folge als Funktion	95
3.1.2	Schreibweise von Folgen	97
3.1.3	Eigenschaften von Folgen	99
3.1.4	Reihen	102
3.2	Spezielle Folgen	104
3.2.1	Arithmetische Folgen	104

3.2.2	Geometrische Folgen	107
3.3	Grenzwerte von Folgen	108
4	Grenzwerte von Funktionen – Stetigkeit	111
4.1	Grenzwerte von Funktionen	111
4.1.1	Weg-Zeit-Gesetzmäßigkeit	111
4.1.2	Rechnerischer Umgang mit Grenzwerten	114
4.2	Stetigkeit	116
5	Differentialrechnung	119
5.1	Die Tangente und der Funktionsgraph	119
5.1.1	Die Differenzenquotientenfunktion	119
5.1.2	Allgemeine Definition des Differentialquotienten	124
5.1.3	Allgemeine Differentiationsregeln	126
5.2	Anwendung auf Kurvenuntersuchungen	132
5.2.1	Extremwerte von Funktionen – Krümmungsverhalten	132
5.2.2	Wendepunkte	137
5.2.3	Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen	140
5.2.4	Aufstellen und Bestimmen der Funktionsgleichung	147
5.3	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	151
5.4	Weitere Differentiationsregeln	159
5.4.1	Produktregel	159
5.4.2	Quotientenregel	160
5.4.3	Kettenregel	161
5.5	Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen	164
5.6	Kurvendiskussion trigonometrischer Funktionen	172
5.6.1	Die Ableitungen des Sinus und Kosinus	172
5.6.2	Zusammengesetzte trigonometrische Funktionen	174
5.7	Exponentialfunktionen	178
5.7.1	Allgemeine Exponentialfunktionen	178
5.7.2	Die e-Funktion	180
5.7.3	Wachstum und Zerfall	184
5.7.4	Kurvendiskussion verknüpfter e-Funktionen	188
6	Integralrechnung	191
6.1	Das bestimmte Integral	191
6.1.1	Beliebig ebene Flächen	191
6.1.2	Die Berechnung des bestimmten Integrals ganzrationaler Funktionen	195
6.1.3	Fläche zwischen Funktionsgraph und x -Achse	198
6.2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	204
6.2.1	Stammfunktion	204

6.2.2	Das unbestimmte Integral	205
6.2.3	Integration gebrochen rationaler Funktionen	207
6.3	Rotationsvolumen	208
7	Lösungen	213
7.1	Kapitel 1 „Von den natürlichen zu den reellen Zahlen“	213
7.2	Kapitel 2 „Funktionen“	215
7.3	Kapitel 3 „Folgen und Reihen“	224
7.4	Kapitel 4 „Grenzwerte von Funktionen – Stetigkeit“	225
7.5	Kapitel 5 „Differentialrechnung“	225
7.6	Kapitel 6 „Integralrechnung“	248
	Sachverzeichnis	251