

---

# Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2

Die drei Bände *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler* werden durch eine Formelsammlung, ein Buch mit Klausur- und Übungsaufgaben sowie ein Buch mit Anwendungsbeispielen zu einem Lehr- und Lernsystem ergänzt:

Lothar Papula

**Mathematische Formelsammlung  
für Ingenieure und Naturwissenschaftler**

Mit zahlreichen Abbildungen und Rechenbeispielen  
und einer ausführlichen Integraltafel

**Mathematik für Ingenieure  
und Naturwissenschaftler – Klausur- und Übungsaufgaben**

**Mathematik für Ingenieure  
und Naturwissenschaftler – Anwendungsbeispiele**

Aufgabenstellungen aus Naturwissenschaft und Technik  
mit ausführlichen Lösungen

---

Lothar Papula

# Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2

Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das  
Grundstudium

14., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 345 Abbildungen, 300 Beispielen aus  
Naturwissenschaft und Technik sowie 324  
Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

 Springer Vieweg

Lothar Papula  
Wiesbaden, Deutschland

ISBN 978-3-658-07789-1  
DOI 10.1007/978-3-658-07790-7

ISBN 978-3-658-07790-7 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1983, 1984, 1986, 1988, 1990, 1991, 1994, 1997, 2000, 2001, 2007, 2008, 2009, 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

*Lektorat:* Thomas Zipsner

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

---

# Vorwort

Das dreibändige Werk **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für das *Grund-* und *Hauptstudium* der naturwissenschaftlich-technischen Disziplinen im Hochschulbereich. Es wird durch eine **mathematische Formelsammlung**, einen **Klausuretrainer** und ein Buch mit **Anwendungsbeispielen** zu einem kompakten *Lehr-* und *Lernsystem* ergänzt. Die Bände 1 und 2 lassen sich dem *Grundstudium* zuordnen, während der dritte Band spezielle Themen überwiegend aus dem *Hauptstudium* behandelt.

## Zur Stoffauswahl des zweiten Bandes

Aufbauend auf den im ersten Band dargestellten *Grundlagen* (Gleichungen und lineare Gleichungssysteme, Vektoralgebra, Funktionen und Kurven, Differential- und Integralrechnung für Funktionen von einer Variablen, Potenzreihenentwicklungen, komplexe Zahlen und Funktionen) werden in dem vorliegenden zweiten Band folgende Stoffgebiete behandelt:

- **Lineare Algebra:** Vektoren, reelle und komplexe Matrizen, Determinanten, lineare Gleichungssysteme, Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix
- **Fourier-Reihen (in reeller und komplexer Form)**
- **Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen:** Partielle Ableitungen, totales Differential, Anwendungen (relative Extremwerte, Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen, lineare Fehlerfortpflanzung), Doppel- und Dreifachintegrale mit Anwendungen
- **Gewöhnliche Differentialgleichungen:** Lineare Differentialgleichungen 1., 2. und  $n$ -ter Ordnung, Anwendungen insbesondere in der Schwingungslehre, numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, Systeme linearer Differentialgleichungen
- **Fourier-Transformationen**
- **Laplace-Transformationen**

Eine Übersicht über die Inhalte der Bände 1 und 3 erfolgt im Anschluss an das Inhaltsverzeichnis.

## Zur Darstellung des Stoffes

Auch in diesem Band wird eine anschauliche, anwendungsorientierte und leicht verständliche Darstellungsform des mathematischen Stoffes gewählt. Begriffe, Zusammenhänge, Sätze und Formeln werden durch zahlreiche Beispiele aus Naturwissenschaft und Technik und anhand vieler Abbildungen näher erläutert.

Einen wesentlichen Bestandteil dieses Werkes bilden die **Übungsaufgaben** am Ende eines jeden Kapitels (nach Abschnitten geordnet). Sie dienen zum Einüben und Vertiefen des Stoffes. Die im Anhang dargestellten ausführlich kommentierten Lösungen ermöglichen dem Leser eine ständige Selbstkontrolle.

## Zur äußeren Form

*Zentrale* Inhalte wie Definitionen, Sätze, Formeln, Tabellen, Zusammenfassungen und Beispiele werden besonders hervorgehoben:

- Definitionen, Sätze, Formeln, Tabellen und Zusammenfassungen sind *gerahmt* und *grau* unterlegt.
- Anfang und Ende eines Beispiels sind durch das Symbol ■ gekennzeichnet.

Bei der (bildlichen) Darstellung von Flächen und räumlichen Körpern werden *Grauraster* unterschiedlicher Helligkeit verwendet, um besonders anschauliche und aussagekräftige Bilder zu erhalten.

## Zum Einsatz von Computeralgebra-Programmen

In zunehmendem Maße werden leistungsfähige Computeralgebra-Programme wie z. B. MATLAB, MAPLE, MATHCAD oder MATHEMATICA bei der mathematischen Lösung naturwissenschaftlich-technischer Probleme in Praxis und Wissenschaft erfolgreich eingesetzt. Solche Programme können bereits im Grundstudium ein nützliches und sinnvolles *Hilfsmittel* sein und so als „*Kontrollinstanz*“ beim Lösen von Übungsaufgaben verwendet werden (Überprüfung der von *Hand* ermittelten Lösungen mit Hilfe eines Computeralgebra-Programms auf einem PC). Die meisten der in diesem Werk gestellten Aufgaben lassen sich auf diese Weise problemlos lösen.

## Zur 14. Auflage

Die **Lösungen** der zahlreichen Übungsaufgaben wurden komplett überarbeitet und wesentlich ausführlicher dargestellt (mit allen Zwischenschritten und Zwischenergebnissen). Gerade für Studienanfänger sind detaillierte Lösungswege besonders hilfreich für ein erfolgreiches Studium. Kürzen eines gemeinsamen Faktors in komplizierteren Brüchen wird in der Regel durch Grauunterlegung gekennzeichnet. Alle Angaben über Integrale beziehen sich auf die *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors.

## **Eine Bitte des Autors**

Für sachliche und konstruktive Hinweise und Anregungen bin ich stets dankbar. Sie sind eine unverzichtbare Voraussetzung und Hilfe für die permanente Verbesserung des Lehrwerkes.

## **Ein Wort des Dankes . . .**

. . . an alle Fachkollegen und Studierenden, die durch Anregungen und Hinweise zur Verbesserung dieses Werkes beigetragen haben,

. . . an die Mitarbeiter des Verlages, besonders an Herrn Thomas Zipsner, für die hervorragende Zusammenarbeit während der Entstehung und Drucklegung dieses Werkes,

. . . an Frau Diane Schulz von der Beltz Bad Langensalza GmbH für den ausgezeichneten mathematischen Satz,

. . . an Herrn Dr. Wolfgang Zettelmeier für die hervorragende Qualität der Abbildungen.

Wiesbaden, im Frühjahr 2015

*Lothar Papula*

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Lineare Algebra</b> .....	1
<b>1 Vektoren</b> .....	1
<b>2 Reelle Matrizen</b> .....	5
2.1 Ein einführendes Beispiel .....	5
2.2 Definition einer reellen Matrix .....	6
2.3 Transponierte einer Matrix .....	10
2.4 Spezielle quadratische Matrizen .....	11
2.4.1 Diagonalmatrix .....	11
2.4.2 Einheitsmatrix .....	12
2.4.3 Dreiecksmatrix .....	12
2.4.4 Symmetrische Matrix .....	13
2.4.5 Schiefsymmetrische Matrix .....	14
2.5 Gleichheit von Matrizen .....	15
2.6 Rechenoperationen für Matrizen .....	15
2.6.1 Addition und Subtraktion von Matrizen .....	16
2.6.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar .....	17
2.6.3 Multiplikation von Matrizen .....	18
<b>3 Determinanten</b> .....	23
3.1 Ein einführendes Beispiel .....	23
3.2 Zweireihige Determinanten .....	25
3.2.1 Definition einer zweireihigen Determinante .....	25
3.2.2 Eigenschaften zweireihiger Determinanten .....	26
3.3 Dreireihige Determinanten .....	33
3.3.1 Definition einer dreireihigen Determinante .....	33
3.3.2 Entwicklung einer dreireihigen Determinante nach Unterdeterminanten (Laplacescher Entwicklungssatz) .....	37
3.4 Determinanten höherer Ordnung .....	41
3.4.1 Definition einer $n$ -reihigen Determinante .....	41
3.4.2 Laplacescher Entwicklungssatz .....	45
3.4.3 Rechenregeln für $n$ -reihige Determinanten .....	47
3.4.4 Regeln zur praktischen Berechnung einer $n$ -reihigen Determinante ..	50
<b>4 Ergänzungen</b> .....	54
4.1 Reguläre Matrix .....	54
4.2 Inverse Matrix .....	55
4.3 Orthogonale Matrix .....	58
4.4 Rang einer Matrix .....	63



---

<b>5 Lineare Gleichungssysteme</b> .....	69
5.1 Allgemeine Vorbetrachtungen .....	69
5.2 Gaußscher Algorithmus .....	72
5.3 Lösungsverhalten eines linearen $(m, n)$ -Gleichungssystems .....	76
5.4 Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems .....	83
5.4.1 Inhomogenes lineares $(n, n)$ -System .....	83
5.4.2 Homogenes lineares $(n, n)$ -System .....	87
5.4.3 Cramersche Regel .....	90
5.5 Berechnung einer inversen Matrix nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren) .....	93
5.6 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren .....	95
5.6.1 Ein einführendes Beispiel .....	95
5.6.2 Linear unabhängige bzw. linear abhängige Vektoren .....	97
5.6.3 Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren .....	99
5.7 Ein Anwendungsbeispiel: Berechnung eines elektrischen Netzwerkes .....	104
<b>6 Komplexe Matrizen</b> .....	105
6.1 Ein einführendes Beispiel .....	106
6.2 Definition einer komplexen Matrix .....	107
6.3 Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen .....	108
6.4 Konjugiert komplexe Matrix, konjugiert transponierte Matrix .....	110
6.5 Spezielle komplexe Matrizen .....	113
6.5.1 Hermitesche Matrix .....	113
6.5.2 Schiefhermitesche Matrix .....	116
6.5.3 Unitäre Matrix .....	118
<b>7 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix</b> .....	120
7.1 Ein einführendes Beispiel .....	120
7.2 Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix .....	125
7.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer $n$ -reihigen Matrix .....	132
7.4 Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller Matrizen .....	138
7.4.1 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Diagonal- bzw. Dreiecksmatrix .....	138
7.4.2 Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix .....	140
7.4.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix .....	142
7.5 Ein Anwendungsbeispiel: Normalschwingungen gekoppelter mechanischer Systeme .....	144
<b>Übungsaufgaben</b> .....	146
Zu Abschnitt 1 .....	146
Zu Abschnitt 2 .....	147
Zu Abschnitt 3 .....	148
Zu Abschnitt 4 .....	151
Zu Abschnitt 5 .....	154
Zu Abschnitt 6 .....	158
Zu Abschnitt 7 .....	160

<b>II Fourier-Reihen</b> .....	163
<b>1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion</b> .....	163
1.1 Einleitung .....	163
1.2 Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe .....	165
1.3 Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe .....	174
1.4 Übergang von der komplexen zur reellen Darstellungsform .....	178
<b>2 Anwendungen</b> .....	182
2.1 Fourier-Zerlegung einer Schwingung (harmonische Analyse) .....	182
2.2 Zusammenstellung wichtiger Fourier-Reihen (Tabelle) .....	186
2.3 Ein Anwendungsbeispiel: Fourier-Zerlegung einer Kippspannung .....	187
<b>Übungsaufgaben</b> .....	190
Zu Abschnitt 1 .....	190
Zu Abschnitt 2 .....	192
<b>III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen</b> .....	194
<b>1 Funktionen von mehreren Variablen</b> .....	194
1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen .....	194
1.2 Darstellungsformen einer Funktion .....	197
1.2.1 Analytische Darstellung .....	197
1.2.2 Darstellung durch eine Funktionstabelle (Funktionstafel) .....	198
1.2.3 Graphische Darstellung .....	200
1.2.3.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum .....	200
1.2.3.2 Schnittkurviendiagramme .....	204
1.3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion .....	209
<b>2 Partielle Differentiation</b> .....	213
2.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung .....	213
2.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung .....	222
2.3 Differentiation nach einem Parameter (verallgemeinerte Kettenregel) .....	227
2.4 Das totale oder vollständige Differential einer Funktion .....	232
2.4.1 Geometrische Betrachtungen .....	232
2.4.2 Definition des totalen oder vollständigen Differentials .....	234
2.5 Anwendungen .....	238
2.5.1 Implizite Differentiation .....	238
2.5.2 Linearisierung einer Funktion .....	242
2.5.3 Relative oder lokale Extremwerte .....	245
2.5.4 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen .....	252
2.5.5 Lineare Fehlerfortpflanzung .....	259

<b>3 Mehrfachintegrale</b> .....	266
3.1 Doppelintegrale .....	266
3.1.1 Definition und geometrische Deutung eines Doppelintegrals .....	266
3.1.2 Berechnung eines Doppelintegrals .....	269
3.1.2.1 Doppelintegral in kartesischen Koordinaten .....	269
3.1.2.2 Doppelintegral in Polarkoordinaten .....	277
3.1.3 Anwendungen .....	282
3.1.3.1 Flächeninhalt .....	283
3.1.3.2 Schwerpunkt einer homogenen Fläche .....	289
3.1.3.3 Flächenmomente (Flächenträgheitsmomente) .....	295
3.2 Dreifachintegrale .....	301
3.2.1 Definition eines Dreifachintegrals .....	301
3.2.2 Berechnung eines Dreifachintegrals .....	303
3.2.2.1 Dreifachintegral in kartesischen Koordinaten .....	303
3.2.2.2 Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten .....	307
3.2.3 Anwendungen .....	312
3.2.3.1 Volumen und Masse eines Körpers .....	312
3.2.3.2 Schwerpunkt eines homogenen Körpers .....	320
3.2.3.3 Massenträgheitsmomente .....	326
<b>Übungsaufgaben</b> .....	332
Zu Abschnitt 1 .....	332
Zu Abschnitt 2 .....	332
Zu Abschnitt 3 .....	338
<b>IV Gewöhnliche Differentialgleichungen</b> .....	343
<b>1 Grundbegriffe</b> .....	343
1.1 Ein einführendes Beispiel .....	343
1.2 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung .....	345
1.3 Lösungen einer Differentialgleichung .....	345
1.4 Modellmäßige Beschreibung naturwissenschaftlich-technischer Problemstellungen durch Differentialgleichungen .....	348
1.5 Anfangswert- und Randwertprobleme .....	351
<b>2 Differentialgleichungen 1. Ordnung</b> .....	355
2.1 Geometrische Betrachtungen .....	355
2.2 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen .....	358
2.3 Integration einer Differentialgleichung durch Substitution .....	362
2.4 Exakte Differentialgleichungen .....	365
2.5 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung .....	370
2.5.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung .....	370
2.5.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung .....	371
2.5.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung .....	373
2.5.3.1 Variation der Konstanten .....	373
2.5.3.2 Aufsuchen einer partikulären Lösung .....	377

2.6	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . .	380
2.7	Anwendungsbeispiele . . . . .	384
2.7.1	Radioaktiver Zerfall . . . . .	384
2.7.2	Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes . . . . .	385
2.7.3	Wechselstromkreis . . . . .	388
<b>3</b>	<b>Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . .</b>	<b>392</b>
3.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	392
3.2	Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung . .	393
3.3	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung . . . . .	400
3.4	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung . . . . .	407
<b>4</b>	<b>Anwendungen in der Schwingungslehre . . . . .</b>	<b>417</b>
4.1	Mechanische Schwingungen . . . . .	417
4.1.1	Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik . . . . .	417
4.1.2	Freie ungedämpfte Schwingung . . . . .	420
4.1.3	Freie gedämpfte Schwingung . . . . .	424
4.1.3.1	Schwache Dämpfung (Schwingungsfall) . . . . .	424
4.1.3.2	Starke Dämpfung (aperiodisches Verhalten, Kriechfall) . . . . .	427
4.1.3.3	Aperiodischer Grenzfall . . . . .	431
4.1.3.4	Zusammenfassung . . . . .	434
4.1.4	Erzwungene Schwingung . . . . .	435
4.2	Elektrische Schwingungen . . . . .	445
4.2.1	Schwingungsgleichung eines elektrischen Reihenschwingkreises . . . . .	445
4.2.2	Freie elektrische Schwingung . . . . .	448
4.2.3	Erzwungene elektrische Schwingung . . . . .	451
<b>5</b>	<b>Lineare Differentialgleichungen <math>n</math>-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten</b>	<b>455</b>
5.1	Definition einer linearen Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	455
5.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung . . . . .	456
5.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung . . . . .	463
5.4	Ein Eigenwertproblem: Bestimmung der Eulerschen Knicklast . . . . .	469
<b>6</b>	<b>Numerische Integration einer Differentialgleichung . . . . .</b>	<b>473</b>
6.1	Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung . . . . .	474
6.1.1	Streckenungsverfahren von Euler . . . . .	474
6.1.2	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung . . . . .	478
6.2	Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung nach dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung . . . . .	484
<b>7</b>	<b>Systeme linearer Differentialgleichungen . . . . .</b>	<b>488</b>
7.1	Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	488
7.1.1	Ein einführendes Beispiel . . . . .	488
7.1.2	Grundbegriffe . . . . .	489

7.1.3	Integration des homogenen linearen Differentialgleichungssystems ...	492
7.1.4	Integration des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems ..	497
7.1.4.1	Aufsuchen einer partikulären Lösung .....	497
7.1.4.2	Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren .....	503
7.1.5	Ein Anwendungsbeispiel: Kettenleiter .....	512
7.2	Systeme linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....	516
<b>Übungsaufgaben</b> .....		522
Zu Abschnitt 1	.....	522
Zu Abschnitt 2	.....	523
Zu Abschnitt 3	.....	529
Zu Abschnitt 4	.....	531
Zu Abschnitt 5	.....	534
Zu Abschnitt 6	.....	538
Zu Abschnitt 7	.....	539
<b>V Fourier-Transformationen</b> .....		542
<b>1 Grundbegriffe</b> .....		542
1.1	Einleitung .....	542
1.2	Definition der Fourier-Transformierten einer Funktion .....	547
1.3	Inverse Fourier-Transformation .....	552
1.4	Äquivalente Fourier-Darstellung in reeller Form .....	554
<b>2 Spezielle Fourier-Transformationen</b> .....		555
2.1	Fourier-Kosinus-Transformation .....	555
2.2	Fourier-Sinus-Transformation .....	557
2.3	Zusammenhang zwischen den Fourier-Transformationen $F(\omega)$ , $F_c(\omega)$ und $F_s(\omega)$ .....	559
<b>3 Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen</b> .....		561
3.1	Sprungfunktionen .....	561
3.2	Rechteckige Impulse .....	564
3.3	Diracsche Deltafunktion (Impulsfunktion) .....	565
3.4	Zusammenhang zwischen der Sprungfunktion und der Diracschen Deltafunktion .....	570
<b>4 Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationssätze)</b> .....		573
4.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen) .....	573
4.2	Ähnlichkeitssatz .....	575
4.3	Verschiebungssatz (Zeitverschiebungssatz) .....	576
4.4	Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz) .....	579

4.5	Ableitungssätze (Differentiationssätze) .....	581
4.5.1	Ableitungssatz für die Originalfunktion .....	581
4.5.2	Ableitungssatz für die Bildfunktion .....	582
4.6	Integrationsatz für die Originalfunktion .....	585
4.7	Faltungssatz .....	586
4.8	Vertauschungssatz .....	590
4.9	Zusammenfassung der Rechenregeln (Transformationssätze) .....	593
4.10	Fourier-Transformation periodischer Funktionen (Sinus, Kosinus) .....	594
<b>5</b>	<b>Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich</b> .....	<b>595</b>
5.1	Allgemeine Hinweise zur Rücktransformation .....	595
5.2	Tabellen spezieller Fourier-Transformationen .....	598
	Tabelle 1: Exponentielle Fourier-Transformationen .....	598
	Tabelle 2: Fourier-Sinus-Transformationen .....	600
	Tabelle 3: Fourier-Kosinus-Transformationen .....	601
<b>6</b>	<b>Anwendungen der Fourier-Transformation</b> .....	<b>602</b>
6.1	Integration einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten .....	602
6.2	Beispiele aus Naturwissenschaft und Technik .....	604
6.2.1	Fourier-Analyse einer beidseitig gedämpften Kosinusschwingung (amplitudenmodulierte Kosinusschwingung) .....	604
6.2.2	Frequenzgang eines Übertragungssystems .....	606
<b>Übungsaufgaben</b>	.....	<b>610</b>
	Zu Abschnitt 1 .....	610
	Zu Abschnitt 2 .....	611
	Zu Abschnitt 3 .....	612
	Zu Abschnitt 4 .....	614
	Zu Abschnitt 5 .....	618
	Zu Abschnitt 6 .....	619
<b>VI</b>	<b>Laplace-Transformationen</b> .....	<b>620</b>
<b>1</b>	<b>Grundbegriffe</b> .....	<b>620</b>
1.1	Ein einführendes Beispiel .....	620
1.2	Definition der Laplace-Transformierten einer Funktion .....	623
1.3	Inverse Laplace-Transformation .....	628
<b>2</b>	<b>Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationssätze)</b> .....	<b>629</b>
2.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen) .....	630
2.2	Ähnlichkeitssatz .....	631
2.3	Verschiebungssätze .....	632
2.3.1	Erster Verschiebungssatz (Verschiebung nach rechts) .....	632
2.3.2	Zweiter Verschiebungssatz (Verschiebung nach links) .....	635

2.4 Dämpfungssatz .....	637
2.5 Ableitungssätze (Differentiationssätze) .....	638
2.5.1 Ableitungssatz für die Originalfunktion .....	638
2.5.2 Ableitungssatz für die Bildfunktion .....	641
2.6 Integrationssätze .....	643
2.6.1 Integrationssatz für die Originalfunktion .....	643
2.6.2 Integrationssatz für die Bildfunktion .....	645
2.7 Faltungssatz .....	646
2.8 Grenzwertsätze .....	649
2.9 Zusammenfassung der Rechenregeln (Transformationsätze) .....	653
<b>3 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion .....</b>	<b>654</b>
<b>4 Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich .....</b>	<b>658</b>
4.1 Allgemeine Hinweise zur Rücktransformation .....	658
4.2 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen .....	661
<b>5 Anwendungen der Laplace-Transformation .....</b>	<b>664</b>
5.1 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten .....	664
5.1.1 Allgemeines Lösungsverfahren mit Hilfe der Laplace-Transformation .....	664
5.1.2 Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....	665
5.1.3 Integration einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....	667
5.2 Einfache Beispiele aus Physik und Technik .....	670
5.2.1 Entladung eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand ....	670
5.2.2 Zeitverhalten eines $PT_1$ -Regelkreisgliedes .....	672
5.2.3 Harmonische Schwingung einer Blattfeder in einem beschleunigten System .....	673
5.2.4 Elektrischer Reihenschwingkreis .....	675
5.2.5 Gekoppelte mechanische Schwingungen .....	678
<b>Übungsaufgaben .....</b>	<b>680</b>
Zu Abschnitt 1 .....	680
Zu Abschnitt 2 .....	681
Zu Abschnitt 3 .....	684
Zu Abschnitt 4 .....	685
Zu Abschnitt 5 .....	686

---

<b>Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben</b> .....	689
<b>I Lineare Algebra</b> .....	689
Abschnitt 1 .....	689
Abschnitt 2 .....	689
Abschnitt 3 .....	691
Abschnitt 4 .....	693
Abschnitt 5 .....	697
Abschnitt 6 .....	704
Abschnitt 7 .....	707
<b>II Fourier-Reihen</b> .....	716
Abschnitt 1 .....	716
Abschnitt 2 .....	718
<b>III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen</b> .....	723
Abschnitt 1 .....	723
Abschnitt 2 .....	724
Abschnitt 3 .....	733
<b>IV Gewöhnliche Differentialgleichungen</b> .....	746
Abschnitt 1 .....	746
Abschnitt 2 .....	746
Abschnitt 3 .....	755
Abschnitt 4 .....	760
Abschnitt 5 .....	766
Abschnitt 6 .....	771
Abschnitt 7 .....	772
<b>V Fourier-Transformationen</b> .....	778
Abschnitt 1 .....	778
Abschnitt 2 .....	780
Abschnitt 3 .....	784
Abschnitt 4 .....	786
Abschnitt 5 .....	791
Abschnitt 6 .....	792
<b>VI Laplace-Transformationen</b> .....	795
Abschnitt 1 .....	795
Abschnitt 2 .....	796
Abschnitt 3 .....	801
Abschnitt 4 .....	802
Abschnitt 5 .....	803
<b>Literaturhinweise</b> .....	813
<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	814



---

# Inhaltsübersicht Band 1

## **Kapitel I: Allgemeine Grundlagen**

- 1 Einige grundlegende Begriffe über Mengen
- 2 Die Menge der reellen Zahlen
- 3 Gleichungen
- 4 Ungleichungen
- 5 Lineare Gleichungssysteme
- 6 Der Binomische Lehrsatz

## **Kapitel II: Vektoralgebra**

- 1 Grundbegriffe
- 2 Vektorrechnung in der Ebene
- 3 Vektorrechnung im 3-dimensionalen Raum
- 4 Anwendungen in der Geometrie

## **Kapitel III: Funktionen und Kurven**

- 1 Definition und Darstellung einer Funktion
- 2 Allgemeine Funktionseigenschaften
- 3 Koordinatentransformationen
- 4 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion
- 5 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)
- 6 Gebrochenrationale Funktionen
- 7 Potenz- und Wurzelfunktionen
- 8 Kegelschnitte
- 9 Trigonometrische Funktionen
- 10 Arkusfunktionen
- 11 Exponentialfunktionen
- 12 Logarithmusfunktionen
- 13 Hyperbel- und Areafunktionen

## **Kapitel IV: Differentialrechnung**

- 1 Differenzierbarkeit einer Funktion
- 2 Ableitungsregeln
- 3 Anwendungen der Differentialrechnung

**Kapitel V: Integralrechnung**

- 1 Integration als Umkehrung der Differentiation
- 2 Das bestimmte Integral als Flächeninhalt
- 3 Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion
- 4 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung
- 5 Grund- oder Stammintegrale
- 6 Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung einer Stammfunktion
- 7 Elementare Integrationsregeln
- 8 Integrationsmethoden
- 9 Uneigentliche Integrale
- 10 Anwendungen der Integralrechnung

**Kapitel VI: Potenzreihenentwicklungen**

- 1 Unendliche Reihen
- 2 Potenzreihen
- 3 Taylor-Reihen

**Kapitel VII: Komplexe Zahlen und Funktionen**

- 1 Definition und Darstellung einer komplexen Zahl
- 2 Komplexe Rechnung
- 3 Anwendungen der komplexen Rechnung
- 4 Ortskurven

**Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben**

# Inhaltsübersicht Band 3

## **Kapitel I: Vektoranalysis**

- 1 Ebene und räumliche Kurven
- 2 Flächen im Raum
- 3 Skalar- und Vektorfelder
- 4 Gradient eines Skalarfeldes
- 5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes
- 6 Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme
- 7 Linien- oder Kurvenintegrale
- 8 Oberflächenintegrale
- 9 Integralsätze von Gauß und Stokes

## **Kapitel II: Wahrscheinlichkeitsrechnung**

- 1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik
- 2 Grundbegriffe
- 3 Wahrscheinlichkeit
- 4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen
- 5 Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung
- 6 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- 7 Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen
- 8 Prüf- oder Testverteilungen

## **Kapitel III: Grundlagen der mathematischen Statistik**

- 1 Grundbegriffe
- 2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe
- 3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen“)
- 4 Statistische Prüfverfahren für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parametertests“)
- 5 Statistische Prüfverfahren für die unbekannt Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilungstests“)
- 6 Korrelation und Regression

**Kapitel IV: Fehler- und Ausgleichsrechnung**

- 1 „Fehlerarten“ (systematische und zufällige Messabweichungen).  
Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung
- 2 Statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen  
(„Messfehler“)
- 3 Auswertung einer Messreihe
- 4 „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß
- 5 Ausgleichs- oder Regressionskurven

**Anhang:** **Teil A: Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik**  
**Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben**