

---

# Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht

---

Christian van Randenborgh

# Instrumente der Wissensvermittlung im Mathematikunterricht

Der Prozess der Instrumentellen Genese von  
historischen Zeichengeräten



**Springer** Spektrum

Christian van Randenborgh  
Zentrum f. schulprakt. Lehrerbildung  
Bielefeld, Deutschland

Dieses Buch wurde auf der Grundlage der Dissertation des Autors an der Universität Würzburg erstellt. Die Dissertation trägt den Titel:

„Der Prozess der Instrumentellen Genese von historischen Zeichengeräten zu Instrumenten der Wissensvermittlung (Untertitel: Die Bedeutung historischer Zeichengeräte für das Aufdecken verborgener Ideen im Mathematikunterricht)“

ISBN 978-3-658-07290-2    ISBN 978-3-658-07291-9 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-658-07291-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

---

## Vorwort

Im Zeitalter von Smartphone und Computer, grafikfähigem Taschenrechner und Computer-Algebra-System, Tabellenkalkulation und dynamischer Geometriesoftware etc. bedarf es schon einer besonderen Rechtfertigung und guter Gründe, warum sich das Interesse am Einsatz historischer mathematischer Instrumente heute noch lohnt. Geht es darüber hinaus um den Einsatz derartiger Geräte im heutigen Mathematikunterricht, so gilt es auch didaktische Ziele zu benennen. Das hier vorliegende Buch beschäftigt sich mit realen und digitalen Nachbauten von historischen Zeichengeräten, speziell dem Parabelzirkel von FRANS VAN SCHOOTEN und dem Pantographen von CHRISTOPH SCHEINER. Es möchte einerseits gute Gründe für die Beschäftigung mit historischen mathematischen Instrumenten geben und andererseits Interesse an diesen Geräten wecken.

Bei Schülerinnen und Schülern, so zeigen es deren Rückmeldungen, wecken die hier vorgestellten Zeichengeräte Neugier, ihr Einsatz im Mathematikunterricht ermöglicht es ihnen, eigene Entdeckungen zu machen. Für den Mathematikunterricht lohnend ist die Beschäftigung mit historischen Zeichengeräten vor allem deshalb, weil Schülerinnen und Schüler die zugrundeliegende Mathematik aufdecken können. Jedes Zeicheninstrument beruht auf einer mathematischen Idee. Sichtbar wird diese Idee jedoch in der Regel erst nach einer genaueren Untersuchung des Geräts. Damit ist eine didaktische Idee angesprochen, die mit der Erforschung des Geräts verbunden werden kann.

Den Anstoß zu diesem Buch, dessen Grundlage meine Dissertation ist, habe ich aus den Beobachtungen und Erfahrungen erhalten, die ich selbst als Gymnasiallehrer mit dem Unterrichtseinsatz des Parabelzirkels gewonnen habe. Seit dieser Zeit begleitet mich mein Doktorvater, Herr Prof. Dr. Hans-Georg Weigand. Ich bin ihm für seine Unterstützung, seine freundliche und hilfsbereite Art und für seine vielen guten Worte sehr dankbar. Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Anselm Lambert für sein Interesse und seinen genauen Blick und die konstruktive Kritik.

Darüber hinaus gilt mein Dank den Schülerinnen und Schülern, die meine Nachbauten der historischen Zeichengeräte erforscht und meine Arbeitsaufträge motiviert bearbeitet haben. Natürlich richtet sich der Dank auch an ihre Lehrerinnen und Lehrer, die mir die Unterrichtsdurchführung in ihren Kursen ermöglicht haben.

Abschließend möchte ich mich an dieser Stelle bei meiner Familie für die erhaltene Unterstützung, die Zeit und das Verständnis bedanken. Damit meine ich meine Eltern, insbesondere meinen Vater für seine mathematische, didaktische und moralische Unterstützung. Ganz besonders bedanke ich mich für die erhaltenen Freiräume und das Ertragen meines Arbeitspensums bei meiner Frau und meinen Kindern Manuel und Alina.

*Christian van Randenborgh, Bielefeld im September 2014*

---

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	V
Einleitung .....	1
Kapitel 1: Was sind historische Zeicheninstrumente? .....	5
1.1 Was ist ein Instrument? .....	5
1.2 Welche Kriterien muss ein mathematisches Instrument erfüllen, um als Zeicheninstrument bezeichnet werden zu können? .....	5
1.2.1 Der Parabelzirkel von van Schooten als Ideenkonglomerat .....	7
1.2.2 Der Pantograph von Scheiner als Ideenkonglomerat .....	11
1.3 Wann ist ein Instrument, das zum Zeichnen genutzt werden kann, ein mathematisches Instrument? .....	14
1.4 Die zwei wichtigsten Stationen von Zeicheninstrumenten in der Mathematik- geschichte .....	15
1.4.1 Zeichengeräte in der Antike .....	15
1.4.1.1 Euklids Elemente .....	15
1.4.1.2 Pappos .....	22
1.4.2 Zeichengeräte im 17. Jahrhundert .....	22
1.4.2.1 Descartes .....	22
1.4.2.2 Organische Geometrie .....	32
1.5 Gelenkmechanismen .....	34
1.6 Die Entwicklung von zwei speziellen Gelenkmechanismen .....	36
1.6.1 Ein besonderes Kurvenzeichengerät: Der Parabelzirkel von van Schooten .....	36
1.6.1.1 Fadenkonstruktion .....	36
1.6.1.2 Spezielle andere Parabelzirkel .....	38
1.6.2 Ein besonderer Pantograph: Der Pantograph von Scheiner .....	42
1.6.2.1 Der Pantograph von Bramer .....	42
1.6.2.2 Der Pantograph von Schwenter .....	44
1.6.2.3 Der Pantograph von Scheiner .....	44
1.6.2.4 Weitere Entwicklungen .....	44

1.6.3	Zusammenstellungen von Zeichengeräten .....	46
1.6.3.1	Der Parabelzirkel von van Schooten in diesen Zusammenstellungen von Zeichengeräten .....	46
1.6.3.2	Der Pantograph von Scheiner in diesen Zusammenstellungen von Zeichengeräten .....	49
1.7	Fazit: Der Parabelzirkel von van Schooten und der Pantograph von Scheiner .	52
Kapitel 2: Standortbestimmung .....		53
2.1	Instrumentelle Genese .....	53
2.1.1	Zwänge und Möglichkeiten – Vorwissen und Fähigkeiten .....	55
2.1.1.1	Spezielle Zwänge und Möglichkeiten der hier untersuchten Zeichengeräte .....	55
2.1.1.2	Das jeweilige Vorwissen und Fähigkeiten des Nutzers .....	57
2.1.2	Weitere Faktoren im Prozess der Instrumentellen Genese im schulischen Kontext .....	59
2.1.3	Die Übertragbarkeit des Ansatzes der Instrumentellen Genese auf den Einsatz eines historischen Zeichengeräts im Mathematikunterricht ...	59
2.1.3.1	Bau- und Funktionsweise des Parabelzirkels .....	62
2.1.3.2	Bau- und Funktionsweise des Pantographen .....	62
2.1.3.3	Fazit .....	63
2.2	Semiotische Vermittlung .....	64
2.2.1	Wygotskis Grundannahmen .....	64
2.2.1.1	Lernen .....	64
2.2.1.2	Psychologische Werkzeuge .....	66
2.2.1.3	Fazit .....	69
2.2.2	Die Vermittlungsfunktion eines Artefakts .....	71
2.2.3	Fazit .....	74
2.3	Der theoretische Untersuchungsrahmen für den Einsatz eines historischen Zeichengerätes im Mathematikunterricht .....	78
2.3.1	Artefakt-Produkt-Analyse: Die temporäre Betrachtungsphase .....	78
2.3.2	Beziehungsanalyse der Bau- und Funktionsweise: Die separate Betrachtungsphase .....	79
2.3.3	Wissensanalyse: Die synoptische Betrachtungsphase .....	80
2.3.4	Die Betrachtungsphasen und die triadische Zeichenrelation .....	80
2.3.5	Objekte – Operationen, Eigenschaften und Wirkungen .....	81
2.3.6	Fazit: Instrumentelle Genese und Semiotische Vermittlung beim Einsatz historischer Zeichengeräte im Mathematikunterricht .....	83
Kapitel 3: Empirische Untersuchungen .....		85
3.1	Bisherige Untersuchungen über den Einsatz historischer Zeichengeräte im Mathematikunterricht .....	85
3.2	Empirische Untersuchung des Parabelzirkels von van Schooten .....	89
3.2.1	Forschungsfragen .....	89
3.2.2	Untersuchungsansatz – theoretische Grundlagen .....	92

3.2.2.1	Erhebungsmethoden: Teilnehmende Beobachtung und Problemzentrierte Interviews .....	94
3.2.2.2	Aufbereitungsverfahren: Transkription und Konstruktion deskriptiver Systeme .....	94
3.2.2.3	Auswertungsverfahren: Grounded Theory und Qualitative Inhaltsanalyse .....	95
3.2.2.4	Fazit .....	98
3.2.3	Untersuchungsdesign .....	99
3.2.3.1	Klassentypen und Unterrichtsszenarien .....	101
3.2.3.2	Untersuchungsmethodik .....	106
3.2.3.3	Leitfadeninterviews .....	107
3.2.3.4	Datensammlung .....	110
3.2.4	Durchführung .....	111
3.2.5	Auswertung .....	112
3.2.5.1	Aufbereitung der Daten .....	112
3.2.5.2	Darstellung der Ergebnisse .....	112
3.2.5.3	Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse: Wie kann aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissens- vermittlung werden (didaktische Idee)? (Forschungsfrage 4) .	151
3.2.6	Fazit .....	154
3.2.6.1	Konsequenzen für das Modell der Semiotischen Vermittlung .	155
3.2.6.2	Konsequenzen für das Modell der Instrumentellen Genese ...	155
3.2.6.3	Fazit: Das Modell der Instrumentellen Wissensaneignung im Kontext der Semiotischen Vermittlung und der Instrumentellen Genese unter Berücksichtigung des Ideenkonglomerats .....	160
3.3	Empirische Untersuchung des Pantographen von Scheiner .....	162
3.3.1	Untersuchungsdesign .....	162
3.3.1.1	Klassentypen und Unterrichtsszenarien .....	162
3.3.2	Datensammlung und Durchführung .....	166
3.3.3	Auswertung .....	167
3.3.3.1	Darstellung der Ergebnisse des Unterrichtseinsatzes des realen Pantographen (Kurstyp A) .....	167
3.3.3.2	Darstellung der Ergebnisse des Unterrichtseinsatzes des digitalen Pantographen (Kurstyp B) .....	174
3.3.3.3	Interpretation Die Pantographen-Ergebnisse und ihre Konsequenzen für die Frage, wie aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissensvermittlung werden kann (didaktische Idee)? (Forschungsfrage 4) .....	179
3.3.4	Fazit .....	180
3.4	Ergebnisse der Untersuchung des Parabelzirkel- und Pantographeneinsatzes .	182
3.4.1	Das Zeichengerät als Ideenkonglomerat .....	182
3.4.2	Das Ideenkonglomerat im Kontext der Semiotischen Vermittlung (Forschungsfrage 1) .....	183

3.4.3	Das Ideenkonglomerat im Kontext der Instrumentellen Genese (Forschungsfrage 2) .....	184
3.4.4	Instrumentelle Wissensaneignung bei realen und bei digitalen Zeichengeräten (Forschungsfrage 3) .....	185
3.4.5	Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung (Forschungsfrage 4) .....	187
3.4.5.1	Die Erforschung von Zeichengeräten aus Sicht der Schüler ..	188
3.4.5.2	Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung – ein Blick auf die Theorie der Repräsentationsmodi .....	189
3.4.5.3	Zeichengeräte als Instrumente der Wissensvermittlung und ihre möglichen Bezüge zum Modellieren .....	193
3.5	Mathematik-didaktische Ziele der Erforschung von Zeichengeräten .....	195
3.5.1	Von praktischen Tätigkeiten zu theoretischen Überlegungen und Einsichten (Schwerpunkt 1) .....	196
3.5.2	Von materiellen Objekten (real bzw. digital) über mentale Objekte zu idealen Objekten (Schwerpunkt 2) .....	199
3.5.3	Von Vermutungen über Argumente hin zum Beweis (Schwerpunkt 3) .	199
3.5.4	Zusammenfassung .....	200
Kapitel 4: Instrumentelle Wissensaneignung		
	Ein Modell für das Lernen mit Zeichengeräten im Mathematikunterricht .....	203
4.1	Die Ausgangssituation .....	203
4.1.1	Die theoretischen Grundlagen .....	203
4.1.2	Forschungsfragen und Untersuchungsansatz .....	204
4.1.3	Das Untersuchungsdesign .....	204
4.2	Zusammenfassung der Untersuchungsergebnisse .....	205
4.2.1	Zeichengeräte als Ideenkonglomerate verstehen .....	206
4.2.2	Der Einfluss des Ideenkonglomerats auf die Zeichengene- se (Forschungsfrage 1) .....	207
4.2.3	Der Einfluss des Ideenkonglomerats auf die Instrumentelle Gene- se (Forschungsfrage 2) .....	208
4.2.4	Vergleich der Instrumentellen Wissensaneignung bei einem realen und einem digitalen Gerät (Forschungsfrage 3) .....	211
4.2.5	Wie gelingt es, dass aus einem Zeichengerät ein Instrument der Wissensvermittlung wird? (Forschungsfrage 4) .....	213
4.3	Schlussfolgerungen .....	216
4.3.1	Mathematik-didaktische Bedeutung der Ergebnisse .....	216
4.3.2	Weitergehende Überlegungen mit Blick auf das Lernen im Mathematikunterricht .....	219
	Literaturverzeichnis .....	223
	Abbildungsnachweis .....	235