
Vektorbündel

Karlheinz Knapp

Vektorbündel

Vom Möbius-Bündel bis zum
J-Homomorphismus

 Springer Spektrum

Prof. Dr. Karlheinz Knapp
Bergische Universität Wuppertal
Deutschland
knapp@math.uni-wuppertal.de

ISBN 978-3-658-03113-8
DOI 10.1007/978-3-658-03114-5

ISBN 978-3-658-03114-5 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Vektorbündel sind grundlegende Objekte in einer Reihe von mathematischen Gebieten, etwa der Differentialtopologie, der komplexen Analysis oder auch der algebraischen Geometrie. Sie erlauben analog zur Ableitung von Abbildungen in der Analysis eine Linearisierung von geometrischen Objekten. Die bekanntesten Beispiele sind sicher das Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und das Möbiusband.

Dieses Buch möchte in die faszinierende Welt der Vektorbündel einführen. Faszinierend auch deshalb, weil sich hier auf vielfältige und harmonische Weise Algebra und Topologie direkt verbinden. Dies ist natürlich schon in den Objekten selbst, den Vektorbündeln, durch ihre Definition als stetige Familie von Vektorräumen von vornherein so angelegt. Aber die Verbindung geht weiter, nur kurz ein Beispiel hierzu: Die Bildung der p -ten äußeren Potenz $\Lambda^p(W)$ eines Vektorraumes W läßt sich auf Vektorbündel übertragen. Während diese Zuordnung für Vektorräume hauptsächlich ein zusätzliches Produkt bietet, ist in der Vektorbündelkategorie mehr zu beobachten. Zum einen gilt, auch wenn man das Bündel ξ gut kennt, daß man normalerweise recht wenig über seine p -te äußere Potenz $\Lambda^p(\xi)$ weiß, etwa ob diese trivial ist oder nicht. Hier gehen zusätzlich und entscheidend topologische Eigenschaften des Basisraumes des Bündels ein und erlauben so Rückschlüsse auf diesen. Darüber hinaus ist die Zuordnung $\xi \mapsto \Lambda^p(\xi)$ natürlich, das heißt, mit der Wirkung von stetigen Abbildungen vertauschbar. Dies liefert dann Einschränkungen für die Existenz von Bündeln und stetigen Abbildungen und stellt sich damit als zentraler Punkt für die Anwendungen heraus. Die Nähe zur Geometrie zahlt sich hier aus und erlaubt so die Herleitung wichtiger Resultate, wie etwa des Vektorfeldsatzes, des Satzes über die Hopf-Invariante oder die Bestimmung des Bildes des J -Homomorphismus.

Das Buch ist gedacht als ein erster Ausflug, der über einen verschlungenen Pfad bis zu den Gründen des Vektorfeldsatzes und seinem Pendant für stabile Bündel führt und auf dem sich Bekanntschaften mit zahlreichen neuen Gebieten, Resultaten und Theorien machen lassen. Es ist also weniger ein vollständiges Nachschlagewerk oder eine systematische Einführung, sondern eher ein Begleiter, der auch dazu verhelfen soll, Ideen, Techniken und Methoden aus der algebraischen Topologie an ganz konkreten Situationen zu erproben und zu erlernen.

Vektorbündel sind Hintergrund für viele Probleme und Resultate der klassischen und modernen Mathematik und sind oft schon für deren Formulierungen unabdingbar, gehören also zur grundlegenden Sprache dieser Gebiete. Sie bilden insbesondere auch die Grundlage für die K -Theorie, zu der die ersten Teile dieses Buches als Einführung verwendet werden können.

Behandelt werden Vektorbündel hier von der untersten Strukturebene her, also topologische Vektorbündel und später sogar von der der sphärischen Faserungen. Die eingesetz-

ten Methoden stammen vorwiegend aus dem Gebiet der algebraischen Topologie und der Homotopietheorie. Die viel reicheren Ebenen der differenzierbaren, holomorphen oder algebraischen Vektorbündel gehören zu zur Zeit sehr aktiven Gebieten, bilden aber wegen der unterschiedlichen Methoden ein ganz anderes Thema und werden deshalb hier nicht behandelt oder kommen nur am Rande vor.

Leitmotiv für das ganze Buch ist das Schnittproblem für Vektorbündel oder nur anders formuliert, das Stabilisierungsproblem, das heißt, die Untersuchung dessen, was passiert, wenn man triviale Bündel abspaltert oder hinzufügt. Formalisiert wird dies durch die hier so bezeichnete Stabilisierungssequenz, die zunächst ganz geometrisch auf Vektorbündelebene eingeführt wird und deren Behandlung auf jeweils höherer Stufe mehrfach wieder aufgenommen wird. Erst später wird sie mit der langen exakten Sequenz einer Faserung, also ihrer homotopietheoretischen Fassung, identifiziert.

Zweites Leitprinzip ist der durchgängige Versuch, Vektorbündel-Probleme in stabile Probleme zu übersetzen und dann eine Lösung zu suchen. Typische Beispiele hierzu liefert die Stabilisierungssequenz selbst, das im letzten Kapitel ausführlich behandelte Vektorfeld-Problem, der Satz von Barratt-Mahowald oder die zur Klassifikation von stabil trivialen Bündeln verwendeten Gauß-Abbildungen. Auf die K -Theorie selbst wird weniger eingegangen, sie wird früh als Gruppe der stabilen Isomorphieklassen von Vektorbündeln implizit eingeführt und ist als solche immer im Hintergrund präsent. Über die Stabilisierungssequenz fließt dann die (stabile) Information aus der Bott-Periodizität und den K -Gruppen wieder zurück zu den Vektorbündeln selbst.

Die einzelnen Kapitel und Abschnitte besitzen jeweils eigene Einleitungen. Mehr Details zum Inhalt und weitere Motivation zu den eingeführten Begriffen oder den Resultaten findet man dort, sodaß hier nur noch einige Punkte ergänzt werden sollen. Die am Beginn stehende Behandlung der grundlegenden Definitionen und Konstruktionen für Vektorbündel in den ersten beiden Kapiteln haben eigentlich in der Literatur durch hervorragende Darstellungen bereits eine endgültige Form gefunden. Hier ist also nicht viel hinzuzufügen, die vorliegende Darstellung ist lediglich etwas elementarer und ausführlicher. So früh wie möglich wurde der Ausbau der Theorie mit einem Abschnitt über Vektorbündel-Probleme unterbrochen. Dort findet man beispielsweise, wie man mit den bis dahin zur Verfügung stehenden Mitteln das Divisionsalgebren-Problem lösen kann, wobei lediglich für eine noch fehlende Berechnung auf später verwiesen werden muß. Der Rest des Buches findet sich jedoch in weiten Teilen kaum in Lehrbuchform wieder. Sogar einige kleine und möglicherweise noch unbekannt Resultate werden im letzten Teil besprochen.

Man kann für den Gebrauch in der Lehre, zu der der Text ja entstanden ist, eine grobe Einteilung in drei Hauptteile vornehmen. Im ersten, die Kapitel 1-3 umfassenden Teil, kommt man völlig ohne algebraische Topologie, insbesondere ohne Kohomologiegruppen aus. Die hier notwendigen Vorkenntnisse werden fast alle in den beiden Grundvorlesungen über Lineare Algebra und Analysis vermittelt, lediglich einige Grundtatsachen aus der mengentheoretischen Topologie und etwas Gruppentheorie werden darüber hinaus noch benötigt. Dieser Teil ist relativ gut in sich abgeschlossen. Man kann durchaus mit diesem Teil etwa bis zu den Anwendungen auf das Divisionsalgebren-Problem im vierten oder fünften

Semester beginnen. Zu diesem Ausbildungsstand passend, wird gelegentlich auf die Fundamentalgruppe und auf Überlagerungen Bezug genommen.

Die nächsten zwei Kapitel bilden eine Brücke zum letzten Teil. Die Stabilisierungssequenz wird vertieft und die Rolle der Euler-Klasse in ihr wird geklärt, wofür dann natürlich gewöhnliche Kohomologie nötig ist. Diese wird zwar kurz über Eilenberg-MacLane Räume eingeführt, aber erfahrungsgemäß reicht das kaum für eine befriedigende Handhabung aus, sodaß sinnvollerweise eine gewisse Vertrautheit mit diesen Ideen von außen kommen sollte.

Die letzten vier Kapitel richten sich an fortgeschrittene Studierende. Es bleibt aber bei dem Versuch, den Stoff auf einer möglichst elementaren Ebene zu behandeln. In diesem Teil wird stabile Homotopietheorie eingesetzt, aber nicht vorausgesetzt. Der Begriff der stabilen Abbildung wird ausführlich entwickelt und an Beispielen vorgeführt. Spektren kommen dagegen fast gar nicht vor, der zentrale Einhängungssatz wird auf den Satz von Blakers-Massey zurückgeführt, denn für diesen liegen elementare Beweise in der Lehrbuchliteratur vor. Hier werden die Gruppen $J(X)$, der J -Homomorphismus, Periodizitätsoperatoren, die Adams-Vermutung, die EHP-Sequenz und ihre Beziehungen zur Stabilisierungssequenz und die Abhängigkeit des Schnittproblems von der einem Vektorbündel unterliegenden sphärischen Faserung behandelt. Dazu kommen die Beweise des Vektorfeldsatzes, des Satzes von Barratt-Mahowald und die Berechnung von Hopf-Invarianten und Aushängungen von $\text{Bild}(J)$ -Klassen. Insgesamt eignet sich der Stoff sehr gut als Ergänzung oder Erweiterung zu einem parallel durchgeführten Kurs in Topologie.

Großer Wert wurde darauf gelegt, alle Begriffe langsam zu entwickeln, öfters auf wichtige zurückzukommen und alle Beweise ausführlich und möglichst elementar zu führen. Oft war dies nur auf Kosten der Länge, der vollen Allgemeinheit oder eines systematischeren Aufbaus möglich. Da es zum besseren Verständnis viele interne Querverweise gibt, wurden die Literaturverweise zu den ursprünglichen Quellen der Sätze und deren Beweise nur sehr sparsam eingesetzt. Für viele Resultate gibt es mittlerweile Standardbeweise, die ohne Verweis übernommen oder nur geringfügig abgewandelt wurden, aber besonders im letzten Teil finden sich viele neue zum Teil handgestrickte und sicher noch optimierbarere Beweise zu Aussagen, für die keine angemessenen Literaturstellen auffindbar waren und die üblicherweise unter der Bezeichnung Folklore-Sätze laufen.

Fast alle Kapitel enden mit einem Ergänzungsabschnitt, in dem etwas ferner liegende aber verwendete Begriffe und Resultate zum schnelleren Zugriff kurz vorgestellt werden. Ebenso wurde ein Versuch unternommen, durch Bilder die Vorstellungskraft zu fördern. Dies bleibt naturgemäß schwierig, da nicht alles in niedrigen Dimensionen sinnvoll dargestellt werden konnte. Bedanken möchte ich mich bei Herrn R. Grah, der die Umsetzung einiger Abbildungen übernommen hat.¹

Wuppertal, im April 2013

Karlheinz Knapp

¹hier geht's zu den Fehlern: <http://www2.math.uni-wuppertal.de/~knapp/index.html>

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorbündel: Grundlagen	1
1.1	Grundlegende Definitionen	2
1.1.1	Vektorbündel	2
1.1.2	Vektorbündel-Homomorphismen	10
1.1.3	Unterbündel	14
1.1.4	Schnitte	15
1.1.5	Isomorphieklassen von \mathbb{K} -Vektorbündeln über B	18
1.2	Liften und Whitney-Summe	19
1.2.1	Zurückziehen von Vektorbündeln	19
1.2.2	Whitney-Summe	23
1.2.3	Stabile Isomorphie	26
1.3	Vektorbündel-Homomorphismen	27
1.3.1	Bijektive Vektorbündel-Homomorphismen	27
1.3.2	Strikte Vektorbündel-Homomorphismen	29
1.3.3	Kern-, Bild- und Quotientenbündel	31
1.3.4	Projektorenfamilien	33
1.4	Operationen	34
1.4.1	Algebraische Operationen für Vektorbündel	34
1.4.2	Reelle und komplexe Linienbündel	42
1.5	Ergänzungen	45
1.5.1	Projektive Räume	45
1.5.2	Die Spezialfälle $P_1(\mathbb{K}) \cong S^d$	45
1.5.3	Tangentialbündel projektiver Räume	46
1.5.4	Homotopiegruppen	48
2	Umgang mit Vektorbündeln	51
2.1	Schnitte	52
2.1.1	Schnitte und Vektorbündel-Homomorphismen	52
2.1.2	Beispiele	54
2.1.3	Erweiterung und Existenz von Schnitten	56
2.1.4	Der Homotopiesatz	59
2.2	Riemannsche und Hermitesche Metriken	62
2.2.1	Konstruktion und Eigenschaften	62
2.2.2	Orthogonale Komplemente	66
2.2.3	Einbettungen und stabile Inverse	69

2.3	Vektorbündel-Probleme	74
2.4	Klassifikation und Konstruktion von Vektorbündeln durch lokale Daten	83
	2.4.1 Übergangsfunktionen	84
	2.4.2 Klassifikation mittels Übergangsfunktionen	86
	2.4.3 Konstruktionen mittels Übergangsfunktionen	90
2.5	Kleben, Kollabieren	93
	2.5.1 Klebekonstruktionen	93
	2.5.2 Kollabieren von Bündeln über Unterräumen	98
2.6	Exakte Sequenzen	103
	2.6.1 Die lange exakte Sequenz eines Raumpaars	104
	2.6.2 Die Puppe-Sequenz	108
	2.6.3 Gruppenstruktur	112
	2.6.4 Kooperation	114
2.7	Prinzipalbündel und Faserbündel	119
	2.7.1 G -Prinzipalbündel	119
	2.7.2 Vektorbündel und Prinzipalbündel	122
	2.7.3 Zur Klassifikation von Prinzipalbündeln	126
2.8	Zusätzliche Strukturen	129
	2.8.1 Orientierbare Vektorbündel	129
	2.8.2 G -Vektorbündel, eine kurze Einführung	132
2.9	Ergänzungen	135
	2.9.1 Parakompakte Räume und Zerlegungen der Eins	135
	2.9.2 Einhängungen und Schleifenräume	136
	2.9.3 Der polnische Kreis	139
	2.9.4 Exakte Homotopiesequenzen, Faserungen und Kofaserungen	140
3	Klassifikation von Vektorbündeln	151
3.1	Vektorbündel über einer Einhängung	152
	3.1.1 Komplexe Bündel über SX	153
	3.1.2 Reelle Bündel über ΣX	159
	3.1.3 Orientierte Vektorbündel	161
	3.1.4 Stabile Vektorbündel über SX	166
3.2	Die Stabilisierungssequenz I	169
	3.2.1 Die Herleitung der Stabilisierungssequenz	170
	3.2.2 Erste Beispiele zur Stabilisierungssequenz	175
	3.2.3 Stabilitätssätze	177
	3.2.4 Fasersequenzen	181
	3.2.5 Die komplexe Stabilisierungssequenz	184
3.3	Vektorbündel über Sphären	187
	3.3.1 Das Tangentialbündel der Sphäre in der Stabilisierungssequenz	188
	3.3.2 Einschub: Das Vektorfeld-Problem auf S^{4m+1}	193
	3.3.3 Stabile Bündel und Bott-Periodizität	196
	3.3.4 Die ersten instabilen Homotopiegruppen von $SO(n)$	198
	3.3.5 Bündel unendlicher Ordnung	201

3.3.6	Komplexe Bündel	203
3.4	Die Klassifikationssätze	208
3.4.1	Graßmann-Mannigfaltigkeiten und universelle Bündel	208
3.4.2	Klassifizierende Abbildungen	212
3.4.3	Die Klassifikationssätze für reelle und komplexe Bündel	216
3.4.4	Klassifikation stabiler Vektorbündel	220
3.4.5	Vektorbündel über einer Einhängung II	224
3.5	Das Arbeiten mit den Klassifikationssätzen	227
3.5.1	Basispunkte und exakte Sequenzen	228
3.5.2	Intervall mit doppeltem Nullpunkt	235
3.5.3	Nicht-Kommutativität in $\text{Vekt}_{\mathbb{C}}^n(\Sigma X)$	238
3.6	Ergänzungen	242
3.6.1	Schwache Topologie	242
3.6.2	Basispunkte	244
3.6.3	Lie-Gruppen	245
3.6.4	Homotopiemengen und CW - Komplexe	246
3.6.5	Ausschneidung für relative Homotopiegruppen	248
3.6.6	Thom-Räume	250
3.6.7	Anheftende Abbildungen in projektiven Räumen und Berechnung von $[P_n(\mathbb{R}), S^n]_0$	251
4	Charakteristische Klassen für Vektorbündel	255
4.1	Kohomologie	256
4.1.1	Eilenberg-MacLane Räume	256
4.1.2	Linienbündel	258
4.2	Charakteristische Klassen	260
4.2.1	Die Euler-Klasse	260
4.2.2	Stiefel-Whitney und Chern-Klassen	262
4.3	Vektorbündel über CW -Komplexen kleiner Dimension	267
4.4	K -Theorie und Bott-Periodizität	269
4.4.1	Definition der K -Gruppen	269
4.4.2	Das reduzierte Produkt in $\text{SVekt}_{\mathbb{K}}$	272
4.4.3	Die Bott-Periodizitäts Abbildungen	273
4.4.4	Die Gruppen $\text{SVekt}_{\mathbb{R}}(\Sigma^i P_2(\mathbb{C}))$	276
4.4.5	Die Bott-Sequenz	278
4.5	Bott-Periodizität und charakteristische Klassen	280
4.5.1	Spaltungsprinzip und Newton-Polynome	280
4.5.2	Stiefel-Whitney-Klassen für Bündel über Sphären	283
4.6	Vektorbündel und Kohomologie	285
4.6.1	Adams-Filtrierung	285
4.6.2	Bündel über X	286
4.6.3	Bündel über einer Einhängung	288
4.7	Zum Beweis des Periodizitätssatzes	292
4.7.1	Der Morse-Theorie-Beweis	294

4.7.2	Der Homologie-Beweis	296
4.7.3	Der elementare Beweis	300
5	Stabile und nicht stabile Vektorbündel	307
5.1	Die Stabilisierungssequenz II	308
5.1.1	Herleitung der Stabilisierungssequenz	308
5.1.2	Schnitte in Vielfachen von Bündeln	315
5.2	Die Euler-Klasse in der Stabilisierungssequenz	318
5.2.1	Hurewicz-Abbildung und der Satz von Hopf	318
5.2.2	Die Euler-Klasse in der Stabilisierungssequenz	319
5.2.3	Die Euler-Klasse eines n -dimensionalen Bündels über einem n -dimensionalen Komplex	325
5.3	Stabil triviale Vektorbündel	326
5.3.1	Gauß-Abbildungen I	327
5.3.2	Klassifikation stabil trivialer Vektorbündel: der einfachste Fall	328
5.3.3	Beispiele	332
5.3.4	n -dimensionale Bündel über einem n -dimensionalen Komplex	334
5.4	Niedrigdimensionale Beispiele	338
5.4.1	Vektorbündel über $P_2(\mathbb{R})$	338
5.4.2	Ebenenbündel über $P_n(\mathbb{R})$, $n \geq 3$	343
5.5	Stabile Bündel über projektiven Räumen	344
6	Vektorbündel und stabile Homotopie	351
6.1	Stabile Homotopie	353
6.1.1	Einhängungssätze	353
6.1.2	Stabile Abbildungen	357
6.1.3	S-Dualität	361
6.1.4	Der Chern-Charakter	365
6.2	Die allgemeine Stabilisierungssequenz	371
6.2.1	Stiefel-Mannigfaltigkeiten	372
6.2.2	Herleitung der allgemeinen Stabilisierungssequenz	373
6.2.3	Gauß-Abbildungen II	374
6.2.4	Schnitte in $\gamma_{k,n}$ und in stabil trivialen Vektorbündeln	377
6.2.5	Stabilitätseigenschaften	379
6.3	Vektorbündel bis auf Faserhomotopieäquivalenz	383
6.3.1	Die Gruppe $J(X)$	383
6.3.2	Orientierbarkeit in stabiler Homotopie	385
6.3.3	Funktionenräume	389
6.3.4	J -Homomorphismus I	391
6.4	Sphärische Faserungen	398
6.4.1	Klassifizierende Räume für sphärische Faserungen, ein Überblick	398
6.4.2	Bündelreduktion und sphärische Faserungen	400
6.4.3	Reduktion auf stabile Abbildungen	407

7	Adams-Vermutung und Berechnung von $J(X)$	409
7.1	Adams-Operationen	409
7.1.1	Adams-Operationen	409
7.1.2	K-Theorie Hindernisse für Faserhomotopietrivialität	413
7.1.3	Berechnung von $J(P_n(\mathbb{R}))$	418
7.2	Adams-Vermutung	422
7.2.1	Die Adams-Vermutung und der Kograd von Vektorbündeln	423
7.2.2	Die klassifizierende Raum Version der Adams-Vermutung	428
7.2.3	Bild(J)-Theorie und e -Invariante, ein Ausblick	431
7.3	Anwendungen der Adams-Vermutung	435
7.3.1	Der Vektorfeldsatz	435
7.3.2	Fast-parallelisierbare Mannigfaltigkeiten	438
7.3.3	Periodizitätsoperatoren	439
7.3.4	Aushängen von Bild(J)-Klassen	441
7.4	Ergänzungen	448
7.4.1	Die stabile Einhängungsordnung von $P_{2n}(\mathbb{R})$	448
7.4.2	Periodizitätsoperatoren auf Quotienten projektiver Räume	452
8	J-Homomorphismus und EHP-Sequenz	457
8.1	Der klassische J-Homomorphismus	458
8.1.1	Der Verbund zweier Räume und die Hopf-Konstruktion	458
8.1.2	Der J -Homomorphismus II	462
8.1.3	Der Thom-Raum für Bündel über einer Einhängung	464
8.2	EHP-Sequenz, Hopf-Invariante und Whitehead-Produkt	466
8.2.1	Die klassische EHP-Sequenz	466
8.2.2	Die EHP-Faserung	468
8.2.3	Aufspaltungen und James-Modell	471
8.2.4	Das Whitehead-Produkt und die Abbildung P	477
8.2.5	Hopf-Invarianten	482
8.2.6	Distributivgesetze	487
8.3	EHP-Sequenz und Stabilisierungssequenz	490
8.3.1	Klassische EHP-Sequenz und Stabilisierungssequenz	490
8.3.2	Die Hopf-Invariante einer Hopf-Konstruktion	493
8.3.3	EHP-Faserung und Stabilisierungssequenz	498
8.4	Die iterierte Einhängungssequenz von James	500
8.4.1	Die iterierte Einhängungssequenz und das Aushängungsproblem	500
8.4.2	Anwendungen	505
8.5	Ergänzungen	507
8.5.1	Ergänzungen zum Verbund, zur Hopf-Konstruktion und zum J - Homomorphismus	507
8.5.2	Der Thom-Raum des Tangentialbündels der Sphäre	514

9	Vektorbündel im metastabilen Bereich	517
9.1	Metastabile Homotopiegruppen von $SO(n)$	518
9.1.1	Der Satz von Barratt-Mahowald	518
9.1.2	Die Homotopie-Euler-Klasse eines Barratt-Mahowald-Bündels und das Samelson Produkt $\langle c_{\tau S^{2k}}, c_{\tau S^{2k}} \rangle$	524
9.2	Schnitt Hindernisse und stabil triviale Bündel	530
9.2.1	Stabil triviale Bündel	530
9.2.2	Die Hindernisabbildung p_*	531
9.3	James-Periodizität	533
9.4	Vektorfelder auf Sphären und stabil parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten	538
9.4.1	Vektorfelder auf Sphären	540
9.4.2	Das Vektorfeld-Problem für π -Mannigfaltigkeiten	545
9.4.3	Die Stabilisierungssequenz für stabil triviale Bündel	549
9.4.4	Die Homotopie-Euler-Klasse einer Vektorfeld-Bündelreduktion von τS^{n-1}	555
9.5	Gauß-Abbildungen in K-Theorie	559
9.5.1	Adams-Filtrierung-0- und bo -primäre Bündel	560
9.5.2	Die Ordnung der Bündelreduktion $(\tau S^n)^{(-k)}$	570
9.5.3	Der Vektorfeldsatz nach Toda	574
9.5.4	Anwendungen	576
	Literaturverzeichnis	580
	Index	588