Vektorbündel

Karlheinz Knapp

Vektorbündel

Vom Möbius-Bündel bis zum J-Homomorphismus

Springer Spektrum

Prof. Dr. Karlheinz Knapp
Bergische Universität Wuppertal
Deutschland
knapp@math.uni-wuppertal.de

ISBN 978-3-658-03113-8 ISBN 978-3-658-03114-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-03114-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Vektorbündel sind grundlegende Objekte in einer Reihe von mathematischen Gebieten, etwa der Differentialtopologie, der komplexen Analysis oder auch der algebraischen Geometrie. Sie erlauben analog zur Ableitung von Abbildungen in der Analysis eine Linearisierung von geometrischen Objekten. Die bekanntesten Beispiele sind sicher das Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und das Möbiusband.

Dieses Buch möchte in die faszinierende Welt der Vektorbündel einführen. Faszinierend auch deshalb, weil sich hier auf vielfältige und harmonische Weise Algebra und Topologie direkt verbinden. Dies ist natürlich schon in den Objekten selbst, den Vektorbündeln, durch ihre Definition als stetige Familie von Vektorräumen von vornherein so angelegt. Aber die Verbindung geht weiter, nur kurz ein Beispiel hierzu: Die Bildung der p-ten äußeren Potenz $\Lambda^p(W)$ eines Vektorraumes W läßt sich auf Vektorbündel übertragen. Während diese Zuordnung für Vektorräume hauptsächlich ein zusätzliches Produkt bietet, ist in der Vektorbündelkategorie mehr zu beobachten. Zum einen gilt, auch wenn man das Bündel ξ gut kennt, daß man normalerweise recht wenig über seine p-te äußere Potenz $\Lambda^p(\xi)$ weiß, etwa ob diese trivial ist oder nicht. Hier gehen zusätzlich und entscheidend topologische Eigenschaften des Basisraumes des Bündels ein und erlauben so Rückschlüsse auf diesen. Darüber hinaus ist die Zuordnung $\xi \longmapsto \Lambda^p(\xi)$ natürlich, das heißt, mit der Wirkung von stetigen Abbildungen vertauschbar. Dies liefert dann Einschränkungen für die Existenz von Bündeln und stetigen Abbildungen und stellt sich damit als zentraler Punkt für die Anwendungen heraus. Die Nähe zur Geometrie zahlt sich hier aus und erlaubt so die Herleitung wichtiger Resultate, wie etwa des Vektorfeldsatzes, des Satzes über die Hopf-Invariante oder die Bestimmung des Bildes des J-Homomorphismus.

Das Buch ist gedacht als ein erster Ausflug, der über einen verschlungenen Pfad bis zu den Gründen des Vektorfeldsatzes und seinem Pendant für stabile Bündel führt und auf dem sich Bekanntschaften mit zahlreichen neuen Gebieten, Resultaten und Theorien machen lassen. Es ist also weniger ein vollständiges Nachschlagewerk oder eine systematische Einführung, sondern eher ein Begleiter, der auch dazu verhelfen soll, Ideen, Techniken und Methoden aus der algebraischen Topologie an ganz konkreten Situationen zu erproben und zu erlernen.

Vektorbündel sind Hintergrund für viele Probleme und Resultate der klassischen und modernen Mathematik und sind oft schon für deren Formulierungen unabdingbar, gehören also zur grundlegenden Sprache dieser Gebiete. Sie bilden insbesondere auch die Grundlage für die K-Theorie, zu der die ersten Teile dieses Buches als Einführung verwendet werden können.

Behandelt werden Vektorbündel hier von der untersten Strukturebene her, also topologische Vektorbündel und später sogar von der der sphärischen Faserungen. Die eingesetzten Methoden stammen vorwiegend aus dem Gebiet der algebraischen Topologie und der Homotopietheorie. Die viel reicheren Ebenen der differenzierbaren, holomorphen oder algebraischen Vektorbündel gehören zu zur Zeit sehr aktiven Gebieten, bilden aber wegen der unterschiedlichen Methoden ein ganz anderes Thema und werden deshalb hier nicht behandelt oder kommen nur am Rande vor.

Leitmotiv für das ganze Buch ist das Schnittproblem für Vektorbündel oder nur anders formuliert, das Stabilisierungsproblem, das heißt, die Untersuchung dessen, was passiert, wenn man triviale Bündel abspaltet oder hinzufügt. Formalisiert wird dies durch die hier so bezeichnete Stabilisierungssequenz, die zunächst ganz geometrisch auf Vektorbündelebene eingeführt wird und deren Behandlung auf jeweils höherer Stufe mehrfach wieder aufgenommen wird. Erst später wird sie mit der langen exakten Sequenz einer Faserung, also ihrer homotopietheoretischen Fassung, identifiziert.

Zweites Leitprinzip ist der durchgängige Versuch, Vektorbündel-Probleme in stabile Probleme zu übersetzen und dann eine Lösung zu suchen. Typische Beispiele hierzu liefert die Stabilisierungssequenz selbst, das im letzten Kapitel ausführlich behandelte Vektorfeld-Problem, der Satz von Barratt-Mahowald oder die zur Klassifikation von stabil trivialen Bündeln verwendeten Gauß-Abbildungen. Auf die K-Theorie selbst wird weniger eingegangen, sie wird früh als Gruppe der stabilen Isomorphieklassen von Vektorbündeln implizit eingeführt und ist als solche immer im Hintergrund präsent. Über die Stabilisierungssequenz fließt dann die (stabile) Information aus der Bott-Periodizität und den K-Gruppen wieder zurück zu den Vektorbündeln selbst.

Die einzelnen Kapitel und Abschnitte besitzen jeweils eigene Einleitungen. Mehr Details zum Inhalt und weitere Motivation zu den eingeführten Begriffen oder den Resultaten findet man dort, sodaß hier nur noch einige Punkte ergänzt werden sollen. Die am Beginn stehende Behandlung der grundlegenden Definitionen und Konstruktionen für Vektorbündel in den ersten beiden Kapiteln haben eigentlich in der Literatur durch hervorragende Darstellungen bereits eine endgültige Form gefunden. Hier ist also nicht viel hinzuzufügen, die vorliegende Darstellung ist lediglich etwas elementarer und ausführlicher. So früh wie möglich wurde der Ausbau der Theorie mit einem Abschnitt über Vektorbündel-Probleme unterbrochen. Dort findet man beispielsweise, wie man mit den bis dahin zur Verfügung stehenden Mitteln das Divisionsalgebren-Problem lösen kann, wobei lediglich für eine noch fehlende Berechnung auf später verwiesen werden muß. Der Rest des Buches findet sich jedoch in weiten Teilen kaum in Lehrbuchform wieder. Sogar einige kleine und möglicherweise noch unbekannte Resultate werden im letzten Teil besprochen.

Man kann für den Gebrauch in der Lehre, zu der der Text ja entstanden ist, eine grobe Einteilung in drei Hauptteile vornehmen. Im ersten, die Kapitel 1-3 umfassenden Teil, kommt man völlig ohne algebraische Topologie, insbesondere ohne Kohomologiegruppen aus. Die hier notwendigen Vorkenntnisse werden fast alle in den beiden Grundvorlesungen über Lineare Algebra und Analysis vermittelt, lediglich einige Grundtatsachen aus der mengentheoretischen Topologie und etwas Gruppentheorie werden darüber hinaus noch benötigt. Dieser Teil ist relativ gut in sich abgeschlossen. Man kann durchaus mit diesem Teil etwa bis zu den Anwendungen auf das Divisionsalgebren-Problem im vierten oder fünften

Semester beginnen. Zu diesem Ausbildungsstand passend, wird gelegentlich auf die Fundamentalgruppe und auf Überlagerungen Bezug genommen.

Die nächsten zwei Kapitel bilden eine Brücke zum letzten Teil. Die Stabilisierungssequenz wird vertieft und die Rolle der Euler-Klasse in ihr wird geklärt, wofür dann natürlich gewöhnliche Kohomologie nötig ist. Diese wird zwar kurz über Eilenberg-MacLane Räume eingeführt, aber erfahrungsgemäß reicht das kaum für eine befriedigende Handhabung aus, sodaß sinnvollerweise eine gewisse Vertrautheit mit diesen Ideen von außen kommen sollte.

Die letzten vier Kapitel richten sich an fortgeschrittene Studierende. Es bleibt aber bei dem Versuch, den Stoff auf einer möglichst elementaren Ebene zu behandeln. In diesem Teil wird stabile Homotopietheorie eingesetzt, aber nicht vorausgesetzt. Der Begriff der stabilen Abbildung wird ausführlich entwickelt und an Beispielen vorgeführt. Spektren kommen dagegen fast gar nicht vor, der zentrale Einhängungssatz wird auf den Satz von Blakers-Massey zurückgeführt, denn für diesen liegen elementare Beweise in der Lehrbuchliteratur vor. Hier werden die Gruppen $J(X)$, der J-Homomorphismus, Periodizitätsoperatoren, die Adams-Vermutung, die EHP-Sequenz und ihre Beziehungen zur Stabilisierungssequenz und die Abhängigkeit des Schnittproblems von der einem Vektorbündel unterliegenden sphärischen Faserung behandelt. Dazu kommen die Beweise des Vektorfeldsatzes, des Satzes von Barratt-Mahowald und die Berechnung von Hopf-Invarianten und Aushängungen von Bild(J)-Klassen. Insgesamt eignet sich der Stoff sehr gut als Ergänzung oder Erweiterung zu einem parallel durchgeführten Kurs in Topologie.

Großer Wert wurde darauf gelegt, alle Begriffe langsam zu entwickeln, öfters auf wichtige zurückzukommen und alle Beweise ausführlich und möglichst elementar zu führen. Oft war dies nur auf Kosten der Länge, der vollen Allgemeinheit oder eines systematischeren Aufbaus möglich. Da es zum besseren Verständnis viele interne Querverweise gibt, wurden die Literaturverweise zu den ursprünglichen Quellen der Sätze und deren Beweise nur sehr sparsam eingesetzt. Für viele Resultate gibt es mittlerweile Standardbeweise, die ohne Verweis übernommen oder nur geringfügig abgewandelt wurden, aber besonders im letzten Teil finden sich viele neue zum Teil handgestrickte und sicher noch optimierbarere Beweise zu Aussagen, für die keine angemessenen Literaturstellen auffindbar waren und die üblicherweise unter der Bezeichnung Folklore-Sätze laufen.

Fast alle Kapitel enden mit einem Ergänzungsabschnitt, in dem etwas ferner liegende aber verwendete Begriffe und Resultate zum schnelleren Zugriff kurz vorgestellt werden. Ebenso wurde ein Versuch unternommen, durch Bilder die Vorstellungskraft zu fördern. Dies bleibt naturgemäß schwierig, da nicht alles in niedrigen Dimensionen sinnvoll dargestellt werden konnte. Bedanken möchte ich mich bei Herrn R. Grah, der die Umsetzung einiger Abbildungen übernommen hat.[1]

Wuppertal, im April 2013 Karlheinz Knapp

[1]hier geht's zu den Fehlern: http://www2.math.uni-wuppertal.de/~knapp/index.html

Inhaltsverzeichnis