
Lineare Algebra

Albrecht Beutelspacher

Lineare Algebra

Eine Einführung in die Wissenschaft der
Vektoren, Abbildungen und Matrizen

8., aktualisierte Auflage

 Springer Spektrum

Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher
Justus-Liebig-Universität Gießen
Giessen, Deutschland

ISBN 978-3-658-02412-3
DOI 10.1007/978-3-658-02413-0

ISBN 978-3-658-02413-0 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1994, 1995, 1998, 2000, 2001, 2003, 2010, 2014

Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Mathematik – eine Mutprobe?

Mein stolzes Beginnen lief darauf hinaus: Allerkleinstes – auch Prosaisches nicht ausgeschlossen – exakt und minutiös zu schildern und durch scheinbar einfachste, aber gerade deshalb schwierigste Mittel: Simplizität, Durchsichtigkeit im einzelnen und Übersichtlichkeit im ganzen, auf eine gewisse künstlerische Höhe zu heben, ja, es dadurch sogar interessant oder wenigstens lesensmöglich zu machen.

Theodor Fontane

Dies ist ein Buch für Anfänger der Mathematik. Es will sich von all seinen Vorgängern und Konkurrenten vor allem dadurch unterscheiden, dass es bewusst und direkt auf die Studierenden zugeht. Ja, unter den vielen Büchern über lineare Algebra, die Sie in der Bibliothek oder einer Buchhandlung finden, eignet sich dieses besonders dafür, Ihr *erstes* Mathematikbuch zu sein. Der Titel hätte auch lauten können „Meine erste Lineare Algebra“.

Dieses Buch soll Ihnen Mut machen, die Mathematik zu meistern, und Sie nicht durch Unverständlichkeit einschüchtern. Beim Schreiben habe ich mich daher von folgenden Ideen leiten lassen:

Keine abgehobene Sprache! Anfänger haben es schwer mit der Mathematik. Sie tun sich besonders schwer mit der mathematischen Sprache. Dieser kalte Formalismus! Diese unbarmherzige Präzision! Diese unendliche Distanz! Diese Schwindel erregende Abstraktheit!

Ja, die Mathematik ist eine Wissenschaft, die auf formalen Schlüssen basiert – das ist ihre Stärke. Die mathematische Sprache ist präzise und dadurch gegen Irrtümer gefeit. Durch Abstraktheit (was nichts anderes als „Vereinfachung“ bedeutet) wird Erkenntnisfortschritt oft erst möglich. Aber die Tatsache bleibt: Die mathematische Sprache lädt Anfänger in der Regel nicht zum Lesen oder zum Mitmachen ein.

Mit diesem Buch versuche ich eine Quadratur des Kreises, nämlich einerseits, wo es nur geht, diese Sprachbarriere abzubauen, andererseits Sie, liebe Leserin, lieber Leser, vom Nutzen der präzisen Sprache der Mathematik zu überzeugen. Insbesondere werden Sie erfahren, dass Präzision nicht unbedingt etwas mit Formalismus – und schon gar nicht mit trockenem Stil zu tun hat.

Der Stil ist für ein Mathematikbuch ganz unüblich: locker, lustig, leicht und unterhaltsam. Und vor allem habe ich versucht, die üblichen k.o.-Schläge wie etwa „wie man leicht sieht“, „trivialerweise folgt“, „man sieht unmittelbar“ zu vermeiden.

Keine unnötig abstrakte Theorie! Was ist das Ziel einer Vorlesung oder eines Buches über lineare Algebra? Ihnen sollen die wichtigsten Grundkonzepte algebraischen Denkens, algebraische Kenntnisse und Fertigkeiten sowie Anwendungen vermittelt werden. (In diesem Buch finden Sie Anwendungen in Geometrie, beim Lösen von Gleichungssystemen und in der Codierungstheorie.)

Wir werden Themen wie Äquivalenzrelationen, Faktorräume, Polynomringe und natürlich die Hauptthemen der linearen Algebra, nämlich Vektorräume, lineare Abbildungen und Diagonalisierbarkeit ausführlich behandeln.

Mir geht es nicht darum, die lineare Algebra mit allen Feinheiten und in voller Allgemeinheit zu präsentieren – in der Hoffnung, dass Kenner anerkennend mit dem Kopf nicken, aber mit dem Effekt, dass die Studierenden den Wälzer wütend an die Wand werfen.

Nicht Rechnen. Denken! Dies ist keine „Lineare Algebra light“, keine Ausgabe „für kleine Hände“. Es kommt mir mindestens so sehr auf begriffliche Klarheit wie auf technische Fertigkeiten an:

- Vektorräume werden „allgemein“ behandelt und nicht von vornherein auf K^n , \mathbf{R}^n (oder gar \mathbf{R}^3) beschränkt. Dadurch wird die Sache einfacher! Denn ein allgemeiner Vektorraum ist ein einfacheres Objekt als ein Vektorraum, bei dem man sich immer noch mit einer festen Basis herumschlagen (oder -ärgern) muss.
- Die berüchtigten Faktorräume werden ausführlich behandelt – obwohl man Faktorräume in der Linearen Algebra ja zur Not vermeiden könnte. Ich halte aber das Konzept des Faktorraums bzw. der Quotientenstrukturen für so wichtig, dass man das schon im ersten Semester kennen lernen sollte. (Außerdem habe ich das so gut erklärt, dass es jeder verstehen kann!)
- Auch wird in diesem Buch die Theorie der linearen Abbildungen nicht auf Matrizenbolzerei reduziert. Schwierigkeiten werden weder ausgespart noch wird über sie hinweggemogelt.

Viele Übungsaufgaben! Sie finden drei Sorten von Übungsaufgaben. Zunächst ganz einfache Kästchenaufgaben, die in der Regel aus einer „ganz dummen“ Frage bestehen. Diese dienen zur unmittelbaren Selbstkontrolle, ob Sie den Stoff verstanden haben. Lösungen zu diesen Aufgaben finden Sie am Ende des Buches.

Die eigentlichen Übungsaufgaben gehen etwas tiefer – aber auch diese sind (fast) alle leicht zu lösen. Ich habe mich bemüht, keine unnötigen Tricks einzubauen, sondern Ihnen Erfolgserlebnisse zu ermöglichen! Hinweise zur Lösung dieser Aufgaben finden Sie in einem Extra-Kapitel.

Schließlich gibt es „Projekte“; das ist eine Menge zusammengehöriger Übungsaufgaben, mit denen Sie eingeladen werden, ein neues, aber mit dem Stoff des jeweiligen Kapitels eng zusammenhängendes Thema selbständig zu erarbeiten.

Alles in allem über 300 Übungsaufgaben!

Vor kurzem ist übrigens *Lineare Algebra interaktiv* erschienen, eine Übungs-CD zur Linearen Algebra, die noch viel, viel mehr Übungsaufgaben mit Lösungen enthält.

Wenn in einer Vorlesung an einer Universität eine Studentin oder ein Student den Stoff nicht beherrscht und deswegen keinen Schein erhält, so liegt dies – so glauben Lehrende und Lernende übereinstimmend – unzweifelhaft an der Unfähigkeit der Studentin bzw. des Studenten. Ganz anders bei professionellen Kursen im Bereich der Wirtschaft und Industrie. Dort herrschen andere Verhältnisse: Wenn ein Teilnehmer eines Kurses etwas nicht versteht, ist dies eindeutig die Schuld des Dozenten!

Mit diesem Buch stelle ich mich bewusst auf die „professionelle“ Seite: Wenn Sie etwas nicht verstehen, trage ich die Schuld daran. Falls Sie Kritik oder sogar Verbesserungsvorschläge haben, bitte ich Sie, mir ohne Hemmungen zu schreiben.

Einige Hinweise zum Aufbau des Buches: Ich habe mit vielerlei Mitteln versucht, einen lesbaren Text zu verfassen. Einige dieser Mittel sind äußerlich zu erkennen:

- Die Aussagen der Sätze sind farbig unterlegt. Die Sätze sind nicht durchnummeriert, dafür hat (fast) jeder Satz einen Namen; so können Sie ihn über das Stichwortverzeichnis finden.
- Eine Definition erkennt man nicht daran, dass davor „Definition“ steht, sondern daran, dass der zu definierende Begriff **fett** gedruckt ist.
- Das Ende eines jeden Beweises wird durch das Beweisabschlusszeichen angezeigt. Aber auch das Ende eines Satzes, der (meiner Ansicht nach) keines Beweises bedarf, wird so gekennzeichnet:

Obwohl dies ein Buch für Anfänger ist, setze ich gewisse Dinge voraus. So werden etwa Mengenlehre und Beweisprinzipien zwar behandelt – aber nicht sehr ausführlich, damit wir bald zum „eigentlichen“ Stoff kommen.

Mein Dank geht an viele, die mich beim Entstehen dieses Buches unterstützt, ermutigt und beraten haben. Zuallererst danke ich den Hörerinnen und Hörern meiner Vorlesung über Lineare Algebra; für sie hatte ich ein Skriptum geschrieben, das die Grundlage für dieses Buch wurde. Und wenn das Skriptum bei den Studierenden nicht so gut angekommen wäre, wäre ich nie auf den Gedanken gekommen, dieses Buch zu schreiben.

Jörg Eisfeld, Udo Heim, Alexander Pott, Ute Rosenbaum und Johannes Ueberberg haben nicht nur das Manuskript mit Akribie und Einfühlung gelesen, sondern mir immer wieder Mut gemacht, das Buch doch so zu schreiben, wie es mir vorschwebte. Frau Susanne Hunsdorfer hat das einfühlsame Schlussbild gemalt. Allen gilt mein herzlicher Dank.

Als ich mich schon in der Hoffnung wiegte, das Buch sei fertig, habe ich es auf Anregung des Verlags nochmals einer Gruppe junger Studierender zum Lesen gegeben. Und so wurde eine bislang unentdeckte Schicht von Fehlern und Verbesserungsmöglichkeiten ans Licht befördert. Schande über mein Haupt und Tausend Dank an die Studierenden! (Und das heißt immerhin mehr als ein Dank pro entdecktem Fehler.)

Studierende, die es mit der Mathematik wagen wollen, brauchen Mut. Auch ein Autor braucht Mut – jedes neue Buch ist ein neues Wagnis. Aber auch ein Verlag braucht Mut für ein solches Buch. Daher danke ich dem Verlag Vieweg, und ganz besonders Frau Döbert und Frau Schmickler-Hirzebruch sehr, dass sie dieses Buch wagten.

Vorwort zur 8. Auflage

Schon bald nach Erscheinen dieses Buches erlebte ich eine Überraschung: Ich erhielt Fanpost. Nicht gerade wäschekörbeweise, aber immerhin ein paar Briefe pro Semester. Darin schilderten Studierende, dass ihnen dieses Buch geholfen habe, in der ersten Krise des Mathematikstudiums nicht zu verzweifeln, sondern durchzuhalten. Etwas Schöneres kann einem Autor nicht passieren. Denn genau für sie hatte ich das Buch geschrieben. Für Studierende am Anfang des Studiums; für solche, die an der rigorosen mathematischen Sprache zu scheitern drohen; für solche, die in Gefahr sind, unter der Unbarmherzigkeit mathematischer Beweisführung zusammenzubrechen. Ich freue mich sehr darüber, dass dieses Konzept eine große Zahl von Studierenden darin bestärkt hat, bei der Mathematik zu bleiben und ihr Studium erfolgreich zu beenden.

Als die erste Auflage dieser Linearen Algebra erschien, sprach noch niemand von Bachelor und Master. Aber im Grunde war dieses Buch mit seiner Konzentration auf das Wesentliche, mit den zahlreichen Übungsaufgaben und Lernhilfen schon ein Vorgriff auf die Bachelor-Ausbildung. Für die Neuauflage habe ich zahlreiche „kleine“ Änderungen realisiert. So wird dieses Buch auch in Zukunft den Bachelor- und Lehramtsstudierenden in der ersten Phase des Studiums nützlich, hilfreich und anregend sein. Dies hoffe ich jedenfalls.

Kurz vor Fertigstellung dieser Neuausgabe hatte meine Lektorin, Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch, eine wunderbare Idee. Sie hatte die Ausstellung „Mathe macht lustig!“ mit Mathe-Karikaturen im Mathematikum in Gießen gesehen und schlug vor, jedes Kapitel mit einer Karikatur aus dieser Ausstellung abzuschließen. In der Tat eröffnen diese Bilder ganz neue Blicke auf die Mathematik. Die Karikaturisten haben freundlicherweise zugesagt, und so geht mein Dank an Martin Zak, Til Mette, Erich Rauschenbach, Miriam Wurster, Phil Hube, NEL, Leonard Riegel, F.W. Bernstein, Rudi Hurlzmeier und, last but not least, an Ulrike Schmickler-Hirzebruch für ihre mittlerweile jahrzehntelange hervorragende Unterstützung.

Gießen, im November 2013

Albrecht Beutelspacher

Inhaltsverzeichnis

1	Was wir wissen müssen, bevor wir anfangen können	1
1.1	Mengen	1
1.2	Äquivalenzrelationen	4
1.3	Abbildungen	7
1.4	Wann haben zwei Mengen gleich viele Elemente?	13
1.5	Die Σ -Notation	18
1.6	Beweisprinzipien	20
1.7	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	22
2	Körper	29
2.1	Die Definition	29
2.1.1	Gesetze der Addition	29
2.1.2	Gesetze der Multiplikation	30
2.1.3	Distributivgesetz	30
2.2	Beispiele von Körpern	32
2.2.1	Der Körper der komplexen Zahlen	33
2.2.2	Der Quaternionenschiefkörper	36
2.2.3	Einige endliche Körper	40
2.2.4	Konstruktion eines Körpers mit vier Elementen	44
2.3	Automorphismen von Körpern	46
2.3.1	Die Definitionen	47
2.3.2	Der Körper der rationalen Zahlen	47
2.3.3	Der Körper der reellen Zahlen	50
2.3.4	Konjugiert-komplexe Zahlen	51
2.4	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	52
3	Vektorräume	59
3.1	Die Definition	59
3.2	Beispiele von Vektorräumen	61
3.2.1	Vektorräume mit Hilfe von Geometrie	61
3.2.2	Der Vektorraum K^n	62

3.2.3	Der Vektorraum aller $m \times n$ -Matrizen	63
3.2.4	Der Vektorraum aller unendlichen Folgen	64
3.2.5	Ein Vektorraum unendlicher Folgen	64
3.2.6	Vektorräume von Funktionen	64
3.2.7	Lösungen eines Gleichungssystems	65
3.2.8	Teilmengen einer Menge	65
3.2.9	Körper als Vektorräume	65
3.3	Elementare Theorie der Vektorräume	66
3.3.1	Der Begriff der Basis	67
3.3.2	Der Steinitzsche Austauschsatz	75
3.3.3	Der Dimensionssatz	83
3.3.4	Faktorräume	85
3.4	Zur Geschichte der linearen Algebra	92
3.5	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	94
4	Anwendungen von Vektorräumen	105
4.1	Lineare Gleichungssysteme	105
4.1.1	Begriffe und Fragen	105
4.1.2	Exkurs über Matrizen	106
4.1.3	Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen	111
4.1.4	Der Gaußsche Algorithmus	116
4.2	Affine Geometrie	122
4.2.1	Affine Räume	123
4.2.2	Unterräume	126
4.3	Codierungstheorie	129
4.3.1	Grundlegende Begriffe	129
4.3.2	Lineare Codes	133
4.4	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	139
5	Lineare Abbildungen	147
5.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften	147
5.2	Darstellung von linearen Abbildungen durch Matrizen	154
5.3	Der Homomorphiesatz	162
5.4	Der Dualraum	166
5.5	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	171
6	Polynomringe	177
6.1	Ringe	177
6.1.1	Gesetze der Addition	177
6.1.2	Gesetz der Multiplikation	178
6.1.3	Distributivgesetze	178

6.2	Was ist eigentlich x ?	179
6.3	Polynomdivision	187
6.4	Ideale von $K[x]$	192
6.5	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	195
7	Determinanten	203
7.1	Die Determinantenfunktion	203
7.2	Permutationen	207
7.3	Gerade und ungerade Permutationen	211
7.4	Die Leibnizsche Determinantenformel	218
7.5	Wie berechnet man eine Determinante?	222
7.6	Der Multiplikationssatz	233
7.7	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	236
8	Diagonalisierbarkeit	241
8.1	Einführung	241
8.2	Eigenvektoren und Eigenwerte	243
8.3	Das charakteristische Polynom	249
8.4	Das Minimalpolynom	256
8.5	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	265
9	Elementarste Gruppentheorie	271
9.1	Beispiele von Gruppen	271
9.1.1	Gruppen in bekannten Strukturen	273
9.1.2	Gruppen aus bekannten Objekten	274
9.1.3	Gruppen aus Permutationen	276
9.2	Einfache Strukturaussagen für Gruppen	278
9.2.1	Untergruppen	278
9.2.2	Zyklische Gruppen	282
9.2.3	Der Homomorphiesatz	285
9.3	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	289
10	Skalarprodukte	295
10.1	Ein Beispiel	295
10.2	Bilinearformen	297
10.3	Skalarprodukte	307
10.4	Orthogonale Abbildungen	315
10.5	... und eine zweite symmetrische Bilinearform?	324
10.6	Verständnisfragen, Übungen und Tipps	329

11	Lösungen	337
11.1	Lösungsvektoren der \square -Aufgaben	337
11.2	Tipps zur Lösung der Übungsaufgaben	339
	Literatur	359
	Sachverzeichnis	361