Lineare Algebra

Albrecht Beutelspacher

Lineare Algebra

Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen

8., aktualisierte Auflage

Springer Spektrum

Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher
Justus-Liebig-Universität Gießen
Gießen, Deutschland

ISBN 978-3-658-02412-3 ISBN 978-3-658-02413-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-02413-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Mathematik – eine Mutprobe?

> Mein stolzes Beginnen lief darauf hinaus: Allerkleinstes – auch Prosaisches nicht ausgeschlossen – exakt und minutiös zu schildern und durch scheinbar einfachste, aber gerade deshalb schwierigste Mittel: Simplizität, Durchsichtigkeit im einzelnen und Übersichtlichkeit im ganzen, auf eine gewisse künstlerische Höhe zu heben, ja, es dadurch sogar interessant oder wenigstens lesensmöglich zu machen.
>
> Theodor Fontane

Dies ist ein Buch für Anfänger der Mathematik. Es will sich von all seinen Vorgängern und Konkurrenten vor allem dadurch unterscheiden, dass es bewusst und direkt auf die Studierenden zugeht. Ja, unter den vielen Büchern über lineare Algebra, die Sie in der Bibliothek oder einer Buchhandlung finden, eignet sich dieses besonders dafür, Ihr *erstes* Mathematikbuch zu sein. Der Titel hätte auch lauten können „Meine erste Lineare Algebra".

Dieses Buch soll Ihnen Mut machen, die Mathematik zu meistern, und Sie nicht durch Unverständlichkeit einschüchtern. Beim Schreiben habe ich mich daher von folgenden Ideen leiten lassen:

Keine abgehobene Sprache! Anfänger haben es schwer mit der Mathematik. Sie tun sich besonders schwer mit der mathematischen Sprache. Dieser kalte Formalismus! Diese unbarmherzige Präzision! Diese unendliche Distanz! Diese Schwindel erregende Abstraktheit!

Ja, die Mathematik ist eine Wissenschaft, die auf formalen Schlüssen basiert – das ist ihre Stärke. Die mathematische Sprache ist präzise und dadurch gegen Irrtümer gefeit. Durch Abstraktheit (was nichts anderes als „Vereinfachung" bedeutet) wird Erkenntnisfortschritt oft erst möglich. Aber die Tatsache bleibt: Die mathematische Sprache lädt Anfänger in der Regel nicht zum Lesen oder zum Mitmachen ein.

Mit diesem Buch versuche ich eine Quadratur des Kreises, nämlich einerseits, wo es nur geht, diese Sprachbarriere abzubauen, andererseits Sie, liebe Leserin, lieber Leser, vom Nutzen der präzisen Sprache der Mathematik zu überzeugen. Insbesondere werden Sie erfahren, dass Präzision nicht unbedingt etwas mit Formalismus – und schon gar nicht mit trockenem Stil zu tun hat.

Der Stil ist für ein Mathematikbuch ganz unüblich: locker, lustig, leicht und unterhaltsam. Und vor allem habe ich versucht, die üblichen k.o.-Schläge wie etwa „wie man leicht sieht“, „trivialerweise folgt“, „man sieht unmittelbar“ zu vermeiden.

Keine unnötig abstrakte Theorie! Was ist das Ziel einer Vorlesung oder eines Buches über lineare Algebra? Ihnen sollen die wichtigsten Grundkonzepte algebraischen Denkens, algebraische Kenntnisse und Fertigkeiten sowie Anwendungen vermittelt werden. (In diesem Buch finden Sie Anwendungen in Geometrie, beim Lösen von Gleichungssystemen und in der Codierungstheorie.)

Wir werden Themen wie Äquivalenzrelationen, Faktorräume, Polynomringe und natürlich die Hauptthemen der linearen Algebra, nämlich Vektorräume, lineare Abbildungen und Diagonalisierbarkeit ausführlich behandeln.

Mir geht es nicht darum, die lineare Algebra mit allen Finessen und in voller Allgemeinheit zu präsentieren – in der Hoffnung, dass Kenner anerkennend mit dem Kopf nicken, aber mit dem Effekt, dass die Studierenden den Wälzer wütend an die Wand werfen.

Nicht Rechnen. Denken! Dies ist keine „Lineare Algebra light“, keine Ausgabe „für kleine Hände“. Es kommt mir mindestens so sehr auf begriffliche Klarheit wie auf technische Fertigkeiten an:

- Vektorräume werden „allgemein“ behandelt und nicht von vornherein auf K^n, $\mathbf{R}^n$ (oder gar $\mathbf{R}^3$) beschränkt. Dadurch wird die Sache einfacher! Denn ein allgemeiner Vektorraum ist ein einfacheres Objekt als ein Vektorraum, bei dem man sich immer noch mit einer festen Basis herumschlagen (oder -ärgern) muss.
- Die berüchtigten Faktorräume werden ausführlich behandelt – obwohl man Faktorräume in der Linearen Algebra ja zur Not vermeiden könnte. Ich halte aber das Konzept des Faktorraums bzw. der Quotientenstrukturen für so wichtig, dass man das schon im ersten Semester kennen lernen sollte. (Außerdem habe ich das so gut erklärt, dass es jeder verstehen kann!)
- Auch wird in diesem Buch die Theorie der linearen Abbildungen nicht auf Matrizenbolzerei reduziert. Schwierigkeiten werden weder ausgespart noch wird über sie hinweggemogelt.

Viele Übungsaufgaben! Sie finden drei Sorten von Übungsaufgaben. Zunächst ganz einfache Kästchenaufgaben, die in der Regel aus einer „ganz dummen“ Frage bestehen. Diese dienen zur unmittelbaren Selbstkontrolle, ob Sie den Stoff verstanden haben. Lösungen zu diesen Aufgaben finden Sie am Ende des Buches.

Die eigentlichen Übungsaufgaben gehen etwas tiefer – aber auch diese sind (fast) alle leicht zu lösen. Ich habe mich bemüht, keine unnötigen Tricks einzubauen, sondern Ihnen Erfolgserlebnisse zu ermöglichen! Hinweise zur Lösung dieser Aufgaben finden Sie in einem Extra-Kapitel.

Schließlich gibt es „Projekte"; das ist eine Menge zusammengehöriger Übungsaufgaben, mit denen Sie eingeladen werden, ein neues, aber mit dem Stoff des jeweiligen Kapitels eng zusammenhängendes Thema selbständig zu erarbeiten.

Alles in allem über 300 Übungsaufgaben!

Vor kurzem ist übrigens *Lineare Algebra interaktiv* erschienen, eine Übungs-CD zur Linearen Algebra, die noch viel, viel mehr Übungsaufgaben mit Lösungen enthält.

Wenn in einer Vorlesung an einer Universität eine Studentin oder ein Student den Stoff nicht beherrscht und deswegen keinen Schein erhält, so liegt dies – so glauben Lehrende und Lernende übereinstimmend – unzweifelhaft an der Unfähigkeit der Studentin bzw. des Studenten. Ganz anders bei professionellen Kursen im Bereich der Wirtschaft und Industrie. Dort herrschen andere Verhältnisse: Wenn ein Teilnehmer eines Kurses etwas nicht versteht, ist dies eindeutig die Schuld des Dozenten!

Mit diesem Buch stelle ich mich bewusst auf die „professionelle" Seite: Wenn Sie etwas nicht verstehen, trage ich die Schuld daran. Falls Sie Kritik oder sogar Verbesserungsvorschläge haben, bitte ich Sie, mir ohne Hemmungen zu schreiben.

Einige Hinweise zum Aufbau des Buches: Ich habe mit vielerlei Mitteln versucht, einen lesbaren Text zu verfassen. Einige dieser Mittel sind äußerlich zu erkennen:

- Die Aussagen der Sätze sind farbig unterlegt. Die Sätze sind nicht durchnummeriert, dafür hat (fast) jeder Satz einen Namen; so können Sie ihn über das Stichwortverzeichnis finden.
- Eine Definition erkennt man nicht daran, dass davor „Definition" steht, sondern daran, dass der zu definierende Begriff **fett** gedruckt ist.
- Das Ende eines jeden Beweises wird durch das Beweisabschlusszeichen angezeigt. Aber auch das Ende eines Satzes, der (meiner Ansicht nach) keines Beweises bedarf, wird so gekennzeichnet:

Obwohl dies ein Buch für Anfänger ist, setze ich gewisse Dinge voraus. So werden etwa Mengenlehre und Beweisprinzipien zwar behandelt – aber nicht sehr ausführlich, damit wir bald zum „eigentlichen" Stoff kommen.

Mein Dank geht an viele, die mich beim Entstehen dieses Buches unterstützt, ermutigt und beraten haben. Zuallererst danke ich den Hörerinnen und Hörern meiner Vorlesung über Lineare Algebra; für sie hatte ich ein Skriptum geschrieben, das die Grundlage für dieses Buch wurde. Und wenn das Skriptum bei den Studierenden nicht so gut angekommen wäre, wäre ich nie auf den Gedanken gekommen, dieses Buch zu schreiben.

Jörg Eisfeld, Udo Heim, Alexander Pott, Ute Rosenbaum und Johannes Ueberberg haben nicht nur das Manuskript mit Akribie und Einfühlung gelesen, sondern mir immer wieder Mut gemacht, das Buch doch so zu schreiben, wie es mir vorschwebte. Frau Susanne Hunsdorfer hat das einfühlsame Schlussbild gemalt. Allen gilt mein herzlicher Dank.

Als ich mich schon in der Hoffnung wiegte, das Buch sei fertig, habe ich es auf Anregung des Verlags nochmals einer Gruppe junger Studierender zum Lesen gegeben. Und so wurde eine bislang unentdeckte Schicht von Fehlern und Verbesserungsmöglichkeiten ans Licht befördert. Schande über mein Haupt und Tausend Dank an die Studierenden! (Und das heißt immerhin mehr als ein Dank pro entdecktem Fehler.)

Studierende, die es mit der Mathematik wagen wollen, brauchen Mut. Auch ein Autor braucht Mut – jedes neue Buch ist ein neues Wagnis. Aber auch ein Verlag braucht Mut für ein solches Buch. Daher danke ich dem Verlag Vieweg, und ganz besonders Frau Döbert und Frau Schmickler-Hirzebruch sehr, dass sie dieses Buch wagten.

Vorwort zur 8. Auflage

Schon bald nach Erscheinen dieses Buches erlebte ich eine Überraschung: Ich erhielt Fanpost. Nicht gerade wäschekörbeweise, aber immerhin ein paar Briefe pro Semester. Darin schilderten Studierende, dass ihnen dieses Buch geholfen habe, in der ersten Krise des Mathematikstudiums nicht zu verzweifeln, sondern durchzuhalten. Etwas Schöneres kann einem Autor nicht passieren. Denn genau für sie hatte ich das Buch geschrieben. Für Studierende am Anfang des Studiums; für solche, die an der rigorosen mathematischen Sprache zu scheitern drohen; für solche, die in Gefahr sind, unter der Unbarmherzigkeit mathematischer Beweisführung zusammenzubrechen. Ich freue mich sehr darüber, dass dieses Konzept eine große Zahl von Studierenden darin bestärkt hat, bei der Mathematik zu bleiben und ihr Studium erfolgreich zu beenden.

Als die erste Auflage dieser Linearen Algebra erschien, sprach noch niemand von Bachelor und Master. Aber im Grunde war dieses Buch mit seiner Konzentration auf das Wesentliche, mit den zahlreichen Übungsaufgaben und Lernhilfen schon ein Vorgriff auf die Bachelor-Ausbildung. Für die Neuauflage habe ich zahlreiche „kleine" Änderungen realisiert. So wird dieses Buch auch in Zukunft den Bachelor- und Lehramtsstudierenden in der ersten Phase des Studiums nützlich, hilfreich und anregend sein. Dies hoffe ich jedenfalls.

Kurz vor Fertigstellung dieser Neuausgabe hatte meine Lektorin, Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch, eine wunderbare Idee. Sie hatte die Ausstellung „Mathe macht lustig!" mit Mathe-Karikaturen im Mathematikum in Gießen gesehen und schlug vor, jedes Kapitel mit einer Karikatur aus dieser Ausstellung abzuschließen. In der Tat eröffnen diese Bilder ganz neue Blicke auf die Mathematik. Die Karikaturisten haben freundlicherweise zugesagt, und so geht mein Dank an Martin Zak, Til Mette, Erich Rauschenbach, Miriam Wurster, Phil Hube, NEL, Leonard Riegel, F.W. Bernstein, Rudi Hurzlmeier und, last but not least, an Ulrike Schmickler-Hirzebruch für ihre mittlerweile jahrzehntelange hervorragende Unterstützung.

Gießen, im November 2013 Albrecht Beutelspacher

Inhaltsverzeichnis