Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

Band 9

Herausgegeben von
H.-W. Henn,
S. Hußmann,
M. Nührenbörger,
S. Prediger,
C. Selter,
Dortmund, Deutschland

Eines der zentralen Anliegen der Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts stellt die Verbindung von konstruktiven Entwicklungsarbeiten und rekonstruktiven empirischen Analysen der Besonderheiten, Voraussetzungen und Strukturen von Lehr- und Lernprozessen dar. Dieses Wechselspiel findet Ausdruck in der sorgsamen Konzeption von mathematischen Aufgabenformaten und Unterrichtsszenarien und der genauen Analyse dadurch initiierter Lernprozesse.

Die Reihe „Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts" trägt dazu bei, ausgewählte Themen und Charakteristika des Lehrens und Lernens von Mathematik – von der Kita bis zur Hochschule – unter theoretisch vielfältigen Perspektiven besser zu verstehen.

Herausgegeben von
Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn,
Prof. Dr. Stephan Hußmann,
Prof. Dr. Marcus Nührenbörger,
Prof. Dr. Susanne Prediger,
Prof. Dr. Christoph Selter,
Institut für Entwicklung und Erforschung
des Mathematikunterrichts,
Technische Universität Dortmund

Andrea Schink

Flexibler Umgang mit Brüchen

Empirische Erhebung individueller Strukturierungen zu Teil, Anteil und Ganzem

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Susanne Prediger

Springer Spektrum

RESEARCH

Andrea Schink
Moers, Deutschland

Dissertation Technische Universität Dortmund, 2012

Tag der Disputation: 18.04.2012

Erstgutachter: Prof. Dr. Susanne Prediger
Zweitgutachter: Prof. Dr. Stephan Hußmann

ISBN 978-3-658-00920-5 ISBN 978-3-658-00921-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-00921-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Geleitwort

In der Didaktik der Bruchrechnung werden seit vielen Jahren Vorstellungen und Vorgehensweisen von Lernenden mit Brüchen analysiert mit dem Ziel, Defizite aufzudecken und sie durch geeignete Unterrichtsvorschläge zu überwinden. Dabei wurden zwar viele Fehlvorstellungen und typische Fehler identifiziert, doch eine ressourcenorientierte Sichtweise auf die Denk- und Vorgehensweisen der Lernenden ist dagegen bislang nur rudimentär entwickelt, ebenso wie eine Beschreibungssprache, um diese Denk- und Vorgehensweisen in ihrem strukturellen Kern zu erfassen.

Andrea Schink hat in ihrer empirischen Erhebung für beides ein aufschlussreiches Modell geliefert, indem sie in schriftlichen Tests und Interviews die Denk- und Vorgehensweisen von Lernenden in ihrer Eigenlogik erfasst und mit einer neu entwickelten Systematik beschreibt. Entstanden ist dabei ein tiefgehendes, facettenreiches Bild, das die Bedeutung der Beziehung zwischen Teil, Anteil und Ganzem, der flexiblen Strukturierungen und des Aufeinanderbeziehens dieser Bestandteile für einen flexiblen Umgang mit Brüchen herausarbeitet. Damit geht die Autorin weit über bestehende Kategorisierungen durch Grundvorstellungen hinaus und entfaltet ein tiefergehendes Bild vom Denken mit Brüchen.

Die Arbeit sensibilisiert in erheblichem Maße für die Komplexität des mathematischen Feldes, indem sie die komplexen Ansprüche unterschiedlicher Aufgaben aufzeigt, vor allem aber die ungeheure Vielfalt der Denk- und Vorgehensweisen, mit denen die Lernenden die Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem strukturieren. Überzeugend aufgezeigt wird in den umfassenden Analysen der Mehrgewinn des ausgearbeiteten theoretischen Rahmens für das Nachvollziehen komplexer individueller Denk- und Vorgehensweisen.

Wie diese empirischen Erkenntnisse in die Gestaltung von Lernarrangements einfließen können, macht die Autorin ausblickartig auf den letzten Seiten ihrer Arbeit deutlich. Die Ausblicke zeigen, welches konstruktive Potential in den Befunden steckt, die in Zukunft weiter fruchtbar gemacht werden.

Susanne Prediger, IEEM, TU Dortmund

Danksagung

Die Fertigstellung der Dissertation ist ein guter Zeitpunkt, um auf den Prozess zurück zu blicken: Ich habe meine Promotionszeit in Dortmund als eine sehr spannende und gewinnbringende Zeit erlebt und bin stolz und dankbar, dass ich diese Erfahrung machen durfte!

Die Fertigstellung der Dissertation ist damit auch der Zeitpunkt, mich ganz herzlich bei den Menschen zu bedanken, die mich auf diesem Weg begleitet und unterstützt haben und ohne die der Prozess nicht möglich gewesen wäre:

Prof. Dr. Susanne Prediger danke ich für die großartige Betreuung der Arbeit: Als meine Doktormutter hat sie mich für mathematikdidaktische Forschungsfragen begeistert und mich darin unterstützt, mein eigenes Forschungsinteresse zu entwickeln und auszuschärfen. Sie hat mich stets mit Rat und Tat unterstützt, mir zugehört und sie beriet mich in allen „Lebenslagen der Diss“. Die vielen konstruktiven Gespräche mit ihr haben mich in meinem Arbeitsprozess immer weiter getragen.

Prof. Dr. Stephan Hußmann danke ich für die vielen Gespräche und kritischen Rückmeldungen: Er hat sich stets für meine Fragen Zeit genommen und mich in den Höhen und auch Tiefen meiner Arbeit unterstützt und bestärkt und dazu beigetragen, Schwierigkeiten im Prozess stets wieder konstruktiv zu wenden. Ich habe viel von seiner Art, mathematikdidaktische Forschung zu betreiben, gelernt.

Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker danke ich, dass sie während meines Studiums mein Interesse an und meine Begeisterung für Mathematikdidaktik bestärkt hat und mich auch über das Studium hinausgehend mit ihrem Interesse begleitet hat. Sie hat damit letztendlich den Grundstein für meinen weiteren Weg in der Mathematikdidaktik gelegt, wofür ich ihr sehr dankbar bin.

Larissa Zwetzschler danke ich für die vielen Stunden, in denen sie mich in meiner Datenauswertung unterstützt und mir konstruktive Rückmeldungen gegeben hat.

Dr. Kathrin Akinwunmi und Dr. Theresa Deutscher danke ich für die spannende Zeit, in der wir uns gemeinsam den Herausforderungen des Promovierens gestellt haben und in der beide auch über Fragen der Promotion hinausgehend immer freundschaftlich für mich da waren.

Susanne Schnell und Ina Matull danke ich für die vielen produktiven Gespräche und Rückmeldungen, die sie mir zu meiner Arbeit gaben. Über die Promotion hinausgehend habe ich in ihnen wunderbare Freunde gewonnen.

Prof. Dr. Katrin Rolka danke ich für ihre freundschaftliche Unterstützung. Sie hat mir oft bei Fragen zur Promotion zur Seite gestanden und stets Interesse für meine Arbeit gezeigt.

Prof. Dr. Michael Meyer hat mir viele wertvolle Rückmeldungen zu meiner Arbeit gegeben. Dafür vielen Dank!

Der *AG Hußmann-Prediger* am IEEM danke ich für die vielen Gelegenheiten, die sie mir bot, mich und meine Arbeit einer stets konstruktiven Kritik zu stellen. Die Rückmeldungen, die ich in diesem Umfeld bekommen habe, haben mich in meiner Arbeit weiter getragen. Letztendlich danke ich der AG aber auch für das freundschaftliche Umfeld, in dem ich mich sehr wohl gefühlt habe. Es war eine tolle und spannende Zeit, die ich sehr genossen habe!

Allen IEEMlern danke ich für die vielen Gespräche und die Unterstützung in meiner Promotionszeit. Sie alle haben auf ihre Art dazu beigetragen, dass diese für mich eine Zeit bleiben wird, an die ich immer gerne zurückdenken werde. Ihr seid eine tolle Truppe!

Meinen MLLP-Seminaren danke ich für die Unterstützung bei der Datenerhebung und für das Interesse, das sie dem Denken der Schülerinnen und Schüler entgegengebracht haben.

An dieser Stelle danke ich auch den *Lehrerinnen und Lehrern*, die sich auf mein Projekt eingelassen haben und mir ihre Klassen für empirische Erhebungen zur Verfügung gestellt haben. Besonders aber den *Schülerinnen und Schülern*, die mir in ihren schriftlichen Produkten, aber vor allem in Interviews Einblicke in ihr Denken gewährten, möchte ich an dieser Stelle danken.

Mein größter Dank gilt schließlich *meiner lieben Familie*, die mich in jeder Lebenslage unterstützt hat. Ich bin unendlich dankbar für den Halt, den sie mir gegeben hat, und das Interesse, mit dem sie meine Arbeit verfolgt hat!

Andrea Schink

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

„Ich kann mit dem Bruch nicht umgehen. Textaufgaben von Brüchen waren schon immer schwer.“
„Wir können nur normale Aufgaben“
„[...] und man vergisst schnell, Brüche zu rechnen.“
(Nimeth [GeS_149, 2009])

Nimeth, eine Schülerin der siebten Klasse, hat an einem Test zu Brüchen teilgenommen, der der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt.

Mit diesen Bemerkungen kommentiert sie zunächst die Aufgaben – die Testleiterinnen und -leiter hatten die Lernenden dazu aufgefordert, alles, was ihnen zu den Aufgaben einfällt, mit aufzuschreiben.

In ihren Äußerungen scheinen dabei aber auch noch grundsätzlichere Feststellungen im Hinblick auf Brüche allgemein zu stecken, denn sie äußert hier implizit auch ihren Unmut, was das Thema Bruchrechnung angeht. Dabei kommt sie auf mehrere für diese Arbeit wesentliche Punkte zu sprechen:

„Ich kann mit dem Bruch nicht umgehen“

In diesem Satz ist das *Umgehen mit Brüchen* zentral: Nimeth stellt für sich fest, dass sie mit Brüchen nicht umgehen kann. Diesen Kommentar schreibt sie an eine Aufgabe, in der sie 5/8 von 16 Bonbons bestimmen soll (s. Abb. 0-1).

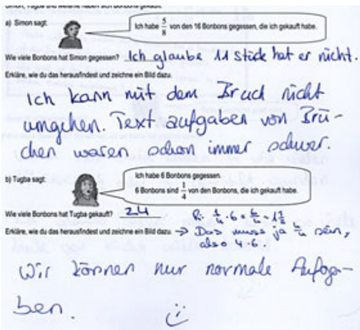

Abb. 0-1: Nimeths [GeS_149] Bearbeitung der Bonbonaufgabe

Was dabei erstaunlich ist, ist, dass Nimeth insgesamt im Test recht erfolgreich ist: So kann sie die Aufgabe, das Ganze zu 1/4 zu bestimmen, wenn 1/4 sechs

Bonbons sind, richtig lösen und löst auch eine strukturgleiche weitere Aufgabe richtig, in der sie das Ganze zum Anteil 2/3 und zum Teil 6 berechnen soll.

Auch weitere Aufgaben, bei denen das Ganze zeichnerisch zu einem gegebenen Teil und Anteil bestimmt werden soll, kann sie richtig lösen. Lediglich wenige Stellen des Tests bearbeitet sie aus fachlicher Sicht nicht vollständig tragfähig.

Dieser Widerspruch zwischen ihrer eigenen Bewertung und der Einschätzung ihrer Bearbeitungen aus fachlicher Sicht ist bemerkenswert. Es stellt sich die Frage, wie Nimeth zu der Aussage gelangt, „mit dem Bruch“ nicht umgehen zu können. Was versteht Nimeth unter dem Umgehen mit Brüchen? Und bezieht sich ihre Aussage nur auf den einen konkreten Aufgabenteil? Dafür spricht die Tatsache, dass sie im nächsten Satz direkt auf das vorliegende Aufgabenformat zu sprechen kommt: *„Textaufgaben von Brüchen waren schon immer schwer“*.

Allerdings erklärt dies nicht die Tatsache, dass Nimeth trotz des Verweises auf die Schwierigkeiten, die ihr Textaufgaben bereiten, die folgende Aufgabe – ebenfalls eine Textaufgabe – richtig bearbeitet.

„Wir können nur normale Aufgaben“

Diesen Satz schreibt Nimeth ganz unten groß auf die erste Seite des Tests. Es ist nicht eindeutig, ob sie sich damit lediglich auf die letzte Aufgabe oder auch auf weitere bezieht.

Wenn sich dieser Satz auf die letzte Aufgabe bezieht, könnte er sich auf die *Aufgabenstruktur* beziehen: In der Aufgabe geht es um das Bestimmen des Ganzen zum Teil und Anteil und nicht um die meist häufiger im Unterricht anzutreffende Variante des Bestimmens des Teils zum Ganzen. Das Bestimmen des Ganzen zum Teil ist dabei eine Anforderung, die zwar strukturell nicht unbedingt schwieriger ist, die aber ein Umdenken erfordert. Andererseits könnte sich die Aussage auch auf das *Aufgabenformat* beziehen, d. h. zum Beispiel Textaufgaben im Vergleich zu „Rechenaufgaben“. Bei Textaufgaben müssen die relevanten Daten erst aus dem Text erschlossen werden und es muss die geeignete Operation ausgewählt werden. Erst im Anschluss kann die Aufgabe z. B. über ein verfügbares oder eingeübtes Verfahren rechnerisch gelöst werden. Das inhaltliche Interpretieren von „Textaufgaben“ kann damit den Umgang mit Brüchen erschweren.

Nimeth stellt für die zweite Bonbonaufgabe (vermutlich im ersten Anlauf) den Term 1/4 · 6 auf und berechnet als Ergebnis richtig 6/4. Diese Mathematisierung ist jedoch für die vorliegende Textaufgabe ungeeignet: Mit der Multiplikation der beiden in der Aufgabenstellung gegebenen Zahlen kann man nicht die gefragte Gesamtanzahl der Bonbons errechnen.

Aber auch wenn man weiß, welche Operation für die vorliegende Aufgabe hilfreich ist, können sich Schwierigkeiten ergeben, die Nimeth in einem weiteren Kommentar anspricht:

„[...] und man vergisst schnell, Brüche zu rechnen.“

Diese Aussage bezieht sich ebenso wie ihre erste Äußerung auf den Umgang mit Brüchen, spricht hier aber den Kalkül als einen speziellen Aspekt an. Nimeth schreibt den Satz zwar unter eine an anderer Stelle im Test vorkommende Aufgabe, doch er gewinnt auch über die lokale Stelle hinweg Bedeutung: Das Rechnen mit Brüchen kann schwer fallen, denn Rechenregeln können schnell vergessen werden, wenn sie nicht mit *inhaltlichen Vorstellungen* verbunden werden.

In Nimeths Bearbeitungen lassen sich keine direkten Hinweise auf einen fehlerhaften Kalkül finden. Im Gegenteil kann sie z. T. sehr gut inhaltlich argumentieren und löst auf diese Weise auch die bereits angesprochene zweite Bonbonaufgabe, indem sie über die Anzahl der zu einem Ganzen benötigten Viertel argumentiert und die Gesamtanzahl als $4 \cdot 6$ berechnet.

Nimeths Anmerkungen zum schriftlichen Test spannen einen Bogen über zentrale Inhalte dieser Arbeit.

Flexibler Umgang mit Brüchen

Brüche und Bruchrechnung sind ein zentrales Thema im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Auch später in der Algebra (z. B. bei der Umformung von Gleichungen), kommt Brüchen eine wichtige Rolle zu (vgl. Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen 2004).

Internationale und deutsche empirische Studien stellen jedoch immer wieder fest, dass Lernende häufig Probleme mit diesem Bereich der Mathematik haben (z. B. Wartha 2007, Padberg 2009, Prediger 2008a, Fischbein et al. 1985 und viele weitere): Schülerinnen und Schüler können zwar im Allgemeinen den *Kalkül* durchführen, aber sie können häufig nicht die damit verbundenen *inhaltlichen Vorstellungen* aktivieren und der Kalkül bleibt daher für viele inhaltsleer, unverstanden und damit potenziell auch fehleranfällig (z. B. Hasemann 1981, Padberg 2009, Prediger 2009a). Der Aufbau von *tragfähigen Vorstellungen* für Brüche und für den Umgang mit ihnen wird indessen immer wieder gefordert (z. B. Malle 2004, Grassmann 1993a / 1993c, Prediger 2009b, Lesh 1979, Streefland 1991, Aksu 1997).

Von der Vorstudie zur Hauptstudie – Von der Multiplikation zum flexiblen Umgang mit Brüchen

Gestartet ist das Promotionsprojekt, das der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt, ursprünglich mit der Absicht, den mathematischen Hintergrund der Multiplikation von Brüchen, Forschungsbefunde und individuelle Sichtweisen der Lernenden fachlich zu erfassen bzw. empirisch zu erheben. Das Ziel bestand – der Didaktischen Rekonstruktion folgend (Kattmann et al. 1997) – darin, aus diesen Erkenntnissen Handlungsmöglichkeiten für die Praxis abzuleiten: Wie könnte ein Lernweg zur Multiplikation von Brüchen aussehen, der ausgehend von den Vorkenntnissen und Annahmen der Lernenden anschaulich zum mathematisch tragfähigen Konzept hinführen kann (Prediger 2009b)? Zu diesem Zweck wurde ein bereits existierender Zugang zur Multiplikation als Anteil-vom-Anteil-Nehmen über Falten als Ausgangspunkt gewählt (Affolter et al. 2004).

Die Vorstudie zeigte jedoch, dass ein Vorstellungsaufbau zur Multiplikation weitere zuvor aufgebaute Vorstellungen und Fähigkeiten voraussetzt. Als ein wichtiges epistemologisches Hindernis zum Verständnis der Multiplikation als Anteil-vom-Anteil-Nehmen stellten sich die Wahl und Interpretation der Bezugsgröße (des Ganzen) heraus: Die Prozesse der Lernenden in den Interviews zeigten, dass das Herstellen von Zusammenhängen zwischen Teil, Anteil und Ganzem – speziell die Wahl des Ganzen für den Bruch – auch für starke Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung darstellen kann. Gleichzeitig sensibilisierten die Prozesse auch für die Vielfalt der Strategien und Vorgehensweisen, die Lernende nutzen, um sich die Strukturen zu erschließen.

Die Bezugsgröße erhält ihre Bedeutung für die Bruchrechnung allerdings nicht erst bei der Multiplikation: Das Herstellen von Zusammenhängen zwischen Teil, Anteil und Ganzem ist für einen flexiblen Umgang mit Brüchen schon zu Beginn der Bruchrechnung wichtig. Um eine Frage wie „Gib den Anteil an!“ beantworten zu können, muss man sich unwillkürlich die Frage stellen „Wovon denn?“. Demnach ist die Frage nach dem Herstellen von Zusammenhängen bereits ganz zu Beginn des Umgehens mit Brüchen eine berechtigte Perspektive, denn schon bei Aufgaben, bei denen Anteile von Flächen eingefärbt oder abgelesen werden sollen, muss man z. B. das Ganze – das dort meist noch „offensichtlich“, d. h. meist gegenständlich konkret ist – identifizieren und strukturieren. Der umgekehrte Weg, ein Ganzes zu einem Teil und Anteil zu bestimmen, ist dabei nicht minder wichtig im Hinblick auf das Herstellen und Erkunden von strukturellen Zusammenhängen zwischen Teil, Anteil und Ganzem:

Wie strukturieren Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge? Wie denken sie überhaupt über das Ganze? Wie finden sie das Ganze? Was ändert sich bei Teil und Anteil, wenn das Ganze größer oder kleiner wird?

Hier ist es wichtig, neben der *fachlichen Klärung* auch die *Lernendenvorstellungen* gleichberechtigt mit in die Analyse einzubeziehen: Was denken Lernende anders, als es die Mathematik formal standardmäßig vorgibt? Warum denken sie das anders und wie kann das Wissen um diese Differenz oder Andersartigkeit zum einen Fehler erklären helfen, aber dann auch zum anderen umgekehrt produktiv für die fachliche Klärung und die Konzeption von Lernumgebungen genutzt werden?

Aus diesen Fragestellungen hat sich der Forschungsfokus zum flexiblen Umgang mit Brüchen herausgeschärft: In der Hauptuntersuchung der vorliegenden Arbeit wird der Umgang mit Brüchen von Lernenden einer sechsten Klasse zu Beginn der Bruchrechnung in Interviews bzw. in acht siebten Klassen nach der Behandlung der Bruchrechnung in einer schriftlichen Erhebung untersucht, wobei Aufgaben der schriftlichen Erhebung für sieben dieser Klassen vertieft ausgewertet wurden. Dabei liegt der Schwerpunkt der Untersuchung auf einem flexiblen Umgang mit Brüchen. Damit ergeben sich folgende Forschungsfragen, die in den einzelnen Kapiteln für die verschiedenen Konstellationen von Teil, Anteil und Ganzem weiter konkretisiert werden:

1. *Wie gehen Lernende in unterschiedlichen Konstellationen mit Teil, Anteil und Ganzem um?*
   a) *Wie strukturieren Lernende in unterschiedlichen Konstellationen Zusammenhänge zwischen Teil, Anteil und Ganzem?*
   b) *Welche Vorstellungen vom Ganzen aktivieren Lernende und inwiefern haben diese einen Einfluss auf die Strukturierung der Konstellationen?*
2. *Wie können Schwierigkeiten und Hürden von Lernenden beim Umgang mit Brüchen überwunden werden?*

Aufbau der Arbeit

In *Kapitel 1* wird der theoretische Hintergrund für diese Arbeit dargestellt:

Als Grundlage für die Sichtweise auf Lernen in dieser Arbeit wird Lernen aus konstruktivistischer Sicht erläutert. Dazu gehören Konzepte wie individuelle Vorstellungen und ihre Bedeutung für das Lernen.

In dieser Sichtweise auf Lernen verortet sich das Forschungsprogramm der Didaktischen Rekonstruktion, dem die vorliegende Arbeit in ihrem Forschungs- und Entwicklungsprozess folgt.

Im Anschluss werden sowohl empirische Befunde zum Umgang von Lernenden mit Brüchen als auch das hier entwickelte Konzept eines flexiblen Umgangs mit Brüchen dargestellt.

„Ich kann mit dem Bruch nicht umgehen“: Zu einem flexiblen Umgang mit Brüchen gehören in dem dieser Arbeit zugrunde liegenden Verständnis folgende Aspekte:

- *Vorstellungen* zu den Brüchen und ihren Operationen, denn *„man vergisst schnell, Brüche zu rechnen“*: Damit das Umgehen mit Brüchen nicht inhaltsleer bleibt, müssen inhaltliche Vorstellungen von Brüchen und ihren Operationen erworben werden. Für die Beschreibung der präskriptiven Vorstellungen aus stoffdidaktischer Sicht wird das Modell der Grundvorstellungen (vom Hofe 1992, vom Hofe 1995) herangezogen und für die Brüche konkretisiert.
- Nutzen *operativer Vorgehensweisen* beim Umgehen mit Brüchen in *verschiedenen Konstellationen und mit verschiedenen Qualitäten des Ganzen (z. B. diskret oder kontinuierlich)* sowie *Einheiten bilden und umbilden*, damit Schülerinnen und Schüler nicht nur *„normale Aufgaben“* mit dem Umgehen mit Brüchen verbinden: Das Umgehen mit Brüchen bedeutet, dass man Teil, Anteil und Ganzes aus verschiedenen Perspektiven sehen kann und nicht nur den Teil vom Ganzen bestimmt. Dabei liegt der Fokus nicht auf der Ebene einzelner „typischer“ Aufgaben: Für das Umgehen mit Brüchen ist das Durchdringen von strukturellen Zusammenhängen zwischen Teil, Anteil und Ganzem essentiell. Hier können sich operative Vorgehensweisen als fruchtbar erweisen, um z. B. strukturelle Einheiten vom Ganzen zu bilden.

In *Kapitel 2* werden die methodologischen Entscheidungen für das dieser Arbeit zugrunde liegende Forschungsprojekt dargelegt. Es werden sowohl die Erhebungs- und Auswertungsmethoden dargestellt und methodisch verortet als auch die eingesetzten Aufgaben stoffdidaktisch eingeordnet.
Diese Beschreibung wird durch einen Überblick über den Ablauf der Erhebungen und ihr Einfließen in die Analyse ergänzt.
Kapitel 3 stellt knapp die Vorstudie vor, die zur Herausbildung des Forschungsfokus in der Hauptuntersuchung geführt hat. Es werden das Design und der Ablauf dargestellt sowie ein Einblick in einen für die Ausschärfung des Forschungsfokus der Hauptuntersuchung entscheidenden Datenausschnitt der empirischen Erhebung gegeben. Damit nimmt dieses Kapitel einen Sonderstatus ein, da es zwar den Ausgangspunkt für die hauptsächlich geschilderte Untersuchung darstellt, sich ansonsten aber vom Forschungsfokus her insofern unterscheidet, als es sich explizit auf die Multiplikation von Brüchen bezieht. Es stellt in sich einen

abgeschlossenen Teil der Arbeit dar und kann unabhängig vom Rest gelesen werden.
Kapitel 4 bildet einen quantitativen Überblick über die im Haupttest erhobenen schriftlichen Testdaten und leitet über zur vertieften Analyse ausgewählter Interviewsequenzen und Testaufgaben in den *Kapiteln 5 bis 8.*
Die Breite der Daten aus Tests und Interviews werden in *Kapitel 5 bis 8* nach fachlichen Gesichtspunkten gegliedert dargestellt, nämlich nach den unterschiedlichen Konstellationen von Teil, Anteil und Ganzem unter dem Fokus der Forschungsfragen: In *Kapitel 5* steht *Konstellation I – „Gegeben sind Ganzes und Anteil, gesucht ist der Teil“*, in *Kapitel 6 Konstellation II – „Gegeben sind Teil und Ganzes, gesucht ist der Anteil“* und in *Kapitel 7 Konstellation III – „Gegeben sind Teil und Anteil, gesucht ist das Ganze“* im Fokus. Hier werden die unterschiedlichen Strukturierungen, die Lernende vornehmen, anhand der schriftlichen Produkte und Bearbeitungsprozesse in den Interviews analysiert und zur Beantwortung der konkretisierten, auf die jeweilige Konstellation bezogenen Forschungsfragen herangezogen:

- Für *Kapitel 5* liegt der Schwerpunkt auf der Identifikation und Interpretation des Ganzen beim Herstellen von Zusammenhängen zwischen Anteil und Ganzem zum Bestimmen des Teils.
- Für *Kapitel 6* liegt der Schwerpunkt auf der Interpretation des Anteils als Ausdruck von strukturellen Zusammenhängen zwischen Teil und Ganzem.
- Für *Kapitel 7* liegt der Schwerpunkt darauf, wie Lernende Teil und Anteil strukturell in einen Zusammenhang bringen und zur Rekonstruktion des Ganzen nutzen. Darüber hinaus werden auch die (außermathematischen) Vorstellungen, die Lernende mit dem Konzept des Ganzen verbinden, vertieft analysiert.

Kapitel 8 schließlich stellt die Untersuchung des Umgangs mit dem Ganzen in verschiedenen Konstellationen, d. h. in der Inter-Perspektive, dar Hier müssen alle drei Objekte, durch die Aufgabenstellung initiiert, gleichzeitig berücksichtigt und miteinander in Beziehung gesetzt werden. So ergibt sich als konkretisierte Forschungsfrage, wie Lernende Zusammenhänge zwischen verschiedenen Konstellationen herstellen und worauf sie dabei ihre Argumentation stützen.

Die Arbeit schließt mit der konstellationsübergreifenden Diskussion der Ergebnisse der Kapitel 4-8 in *Kapitel 9* und einer Zusammenfassung sowie einem Ausblick in *Kapitel 10*.

Verankerung der Arbeit innerhalb des Projekts KOSIMA

Ebenso wie viele wissenschaftliche Arbeiten ist auch diese Studie in einem größeren Forschungskontext entstanden, der die Arbeit immer mitbeeinflusst hat in ihrem Forschungs- und Entwicklungsparadigma und ihren Forschungsfragen, auch wenn sie einen eigenen spezifischen Fokus hat.

Diese Arbeit ist im Forschungskontext des zehnjährigen Forschungs- und Entwicklungsprojekts KOSIMA – Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen verankert, das von Bärbel Barzel, Stephan Hußmann, Timo Leuders und Susanne Prediger geleitet wird. In diesem langfristig angelegten Projekt werden Lernumgebungen für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I entwickelt, erprobt und hinsichtlich ihrer Voraussetzungen und Wirkungen beforscht (vgl. Hußmann et al. 2011, Prediger 2011a). Prägend für diese Arbeit waren der intensive Blick auf die inhaltlichen Vorstellungen der Kinder und die Möglichkeit, im nicht immer methodisch kontrollierten Umfeld der Arbeit informell Aufgabenstellungen und Lernumgebungen erproben zu können. Wie Ergebnisse dieser Arbeit wiederum in das große Entwicklungsprojekt eingeflossen sind, wird in Abschnitt 9.3 angedeutet.