ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE
HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLEITUNG
DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK“
DRITTER BAND
3

THEORIE DER FUNKTIONEN MEHRERER KOMPLEXER VERÄNDERLICHEN

VON

H. BEHNKE UND P. THULLEN

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
NEW YORK

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1934

ISBN-13: 978-3-642-98844-8 e-ISBN-13: 978-3-642-99659-7
DOI: 10.1007/978-3-642-99659-7

Vorwort.

Die Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen war in den letzten Jahren in zahlreichen Ländern Gegenstand mathematischer Forschung. Die große Zahl wissenschaftlicher Untersuchungen auf diesem Gebiete — in wenigen Jahren mehr als vorher in Jahrzehnten — macht es den interessierten Gelehrten schwer, sich in der Spezialliteratur zurechtzufinden. Hinzu kommt, daß der Ausgangspunkt und die Voraussetzungen — vor allem die unausgesprochenen — bei den verschiedenen Autoren mehr oder minder voneinander abweichen. Das veranlaßte den Herausgeber, uns zu einem Bericht über das gesamte Gebiet aufzufordern.

Nun darf keineswegs übersehen werden, daß mehrere allgemein verbreitete Gesamtdarstellungen vorliegen. Als ältestes Lehrbuch ist hier zu nennen: FORSYTH: Theorie of functions of two variables. Cambridge 1914, sodann der Enzyklopädieartikel von BIEBERBACH, abgeschlossen im Jahre 1922. Wenige Jahre später (1924, in zweiter Auflage 1929) erschien dann das Werk von OSGOOD: Lehrbuch der Funktionentheorie Band II_1, eine Darstellung, der wohl die meisten von uns ihre Einführung in diesen Stoff verdanken. Schließlich hat F. SEVERI 1931 einen Bericht verfaßt, der die rasche Entwicklung der Untersuchungen lebhaft widerspiegelt.

Die vorliegende Schrift steht in ihrem Aufbau zwischen einem Lehrbuch und einem enzyklopädischen Bericht.

Wir waren bestrebt, unter Verarbeitung der neuen Veröffentlichungen eine einheitliche Darstellung zu geben, in der die zugrunde liegenden Voraussetzungen klar herausgearbeitet sind. Bei diesem Ziel konnten wir uns im Aufbau nicht nach historischen Gesichtspunkten richten. Vielmehr schien es uns erforderlich, als erstes Kapitel eine neue Theorie der Bereiche *über* dem Raume von n komplexen Veränderlichen — als Analogon zu den RIEMANNschen Flächen in der klassischen Funktionentheorie — aufzustellen. Bei der Eigenart der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen ist es nach den neuen Ergebnissen nicht möglich, einen großen Teil der allgemeinen Theorie zuerst für schlichte Bereiche aufzubauen, ohne nachher im Prinzip die Grundlagen noch einmal zu behandeln.

Das zweite Kapitel bringt die geometrischen Grundlagen. Mit dem dritten Kapitel — der Behandlung der elementaren Reihen — beginnt dann die Untersuchung der Funktionen selbst. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit dem von HARTOGS und E. E. LEVI bewiesenen

Kontinuitätssatz für Singularitätenmannigfaltigkeiten und seinen Folgerungen. Im Mittelpunkt des fünften Kapitels steht der WEIERSTRASSsche Vorbereitungssatz; aus ihm folgt die Verteilung der Nullstellen und der außerwesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Das sechste Kapitel — die Theorie der Regularitätsbereiche — wird vom Begriff der Regularitätshüllen und dem Hauptsatz über die gleichzeitige Fortsetzbarkeit beherrscht. Der Abbildungstheorie ist das letzte Kapitel gewidmet. Hier schließen wir uns vor allem den Untersuchungen von H. CARTAN an, während die Metrik von CARATHÉODORY das Kapitel beschließt, obwohl sie historisch zuerst zu nennen wäre und einen so großen Anstoß zur Entwicklung der Abbildungstheorie gegeben hat; doch steht sie mit den vorangehenden Abschnitten in loserem Zusammenhang. Es folgt als Anhang dieses Kapitels ein kurzer Bericht über die BERGMANNsche Abbildungstheorie.

Wir haben uns bemüht, drei allgemeine Forderungen zu beachten, die uns dem Wesen einer Theorie der analytischen Funktionen zu entsprechen scheinen, aber in der Literatur keineswegs immer zur Geltung kommen.

1. Die endlichfernen Punkte des Raumes der komplexen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind vor den unendlichfernen Punkten nicht ausgezeichnet, und darum ist eine Ausnahmestellung der unendlichfernen Punkte möglichst zu beseitigen.

2. Eine *komplexe* Funktionentheorie ist *komplex* aufzubauen; ein Zurückgreifen auf Real- und Imaginärteile ist zu vermeiden.

3. Die verschiedenen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sind gleichberechtigt. Deshalb ist eine Zerlegung nach den einzelnen Veränderlichen und damit ein stufenweiser Aufbau der Probleme mit Hilfe der klassischen Funktionentheorie nach Möglichkeit zu unterlassen. Solche Zerlegungen, ständig angewandt, führen leicht zu rein formalen Übertragungen der klassischen Theorie.

Der von vornherein festgesetzte Umfang dieser Schrift legt uns starke Beschränkungen auf. Es ist uns aus diesem Grunde unmöglich, auf die Untersuchung spezieller Funktionen (so der algebraischen, periodischen, automorphen und ganzen Funktionen) einzugehen. Aber auch die ausführlichen Beweise für die zahlreichen Aussagen können nicht gebracht werden, ohne den Umfang der Schrift zu vervielfachen. Trotzdem haben wir an den wichtigsten Stellen den Beweisgang so zu skizzieren versucht, daß der geübte Leser die Grundzüge des Beweises daraus erkennen kann. Das mußte auch dort geschehen, wo der durch unser Programm bestimmte Aufbau in der Literatur nicht vorkommt. Sonst haben wir lediglich auf die veröffentlichten Beweise hingewiesen. Auch galt uns als Grundsatz, Dinge, die in den obenerwähnten Gesamtdarstellungen (insbesondere im OSGOODschen Lehrbuch) ausführlich behandelt werden, so kurz wie möglich zu besprechen.

Eine schwierige Entscheidung verlangte von uns die Frage, ob wir die Theorie von n komplexen Veränderlichen nur für die *beiden* Veränderlichen w und z oder für die n komplexen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ durchführen sollten. Zweifellos birgt die Verwendung der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Gefahr in sich, daß die Darstellung technisch zu kompliziert wird und dann der Plastik, um die wir redlich gerungen haben, entbehrt. Auf der anderen Seite belastet die alleinige Verwendung von w und z — immer unter der Voraussetzung, daß es sich hier um eine Funktionentheorie *mehrerer* Veränderlichen handelt — nicht nur das Gewissen mathematischer Pedanten. Als Ausweg haben wir einen Kompromiß gewählt. Überall dort, wo der Formelapparat für die Funktionen über dem Raume von n komplexen Veränderlichen nicht erheblich größer ist als jener für die Funktionen $f(w, z)$ — und das gilt für den weit überwiegenden Teil dieser Schrift —, behandeln wir die Funktionen $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. An den übrigen Stellen beschränken wir uns auf die Veränderlichen w und z, das gilt vor allem dort, wo anschaulich Geometrisches wie die Kreiskörper und andere spezielle Bereiche hineinspielen. Nur in einzelnen Fällen werden wir durch sachliche Schwierigkeiten hierzu gezwungen. Wo dies eintritt, ist es jeweils hervorgehoben.

Zahlreiche Kollegen und jüngere Mathematiker haben mittelbar zur Gestaltung dieser Schrift beigetragen. Junge Kommilitonen gaben, seitdem der ältere von uns beiden vor einigen Jahren eine Vorlesung über dieses Gebiet und daran anschließend regelmäßig Seminare abhielt, durch ihr Interesse unserer Arbeit eine fruchtbare Resonanz. Manche Fachgenossen haben, im Anschluß an die Lektüre der ausgearbeiteten Vorlesung und an Gastvorträge in Münster, in Diskussionen und Korrespondenz mit uns zur Klärung vieler hier behandelter Fragen beigetragen. Erwähnt seien die Herren St. Bergmann, Carathéodory, H. Cartan, L. Fantappiè, Hartogs, Kneser, Toeplitz, Welke.

Eine ganz besondere Pflicht ist es uns, Herrn Professor H. Cartan in Straßburg, Herrn Professor H. Kneser in Greifswald und Ecc. Professor Severi in Rom für die ausführlichen Kritiken des Manuskriptes unsern Dank auszusprechen, die uns zu manchen Verbesserungen veranlaßten. Ebenso haben wir Herrn Privatdozenten Dr. G. Köthe und Herrn Dr. Peschl in Münster sowie Herrn Eichelbrenner in Rom für die Bereitwilligkeit und Mühe zu danken, mit der sie uns beim Lesen der Korrekturen unterstützt haben.

Münster i. W., Oktober 1933.

H. Behnke. P. Thullen.

Inhaltsverzeichnis.

Die abgekürzten Literaturhinweise im Text beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß des Berichtes. Dort befindet sich außerdem ein alphabetisches Verzeichnis der hier definierten Begriffe.

* Die ab 1921 erschienene Literatur ist nach Möglichkeit vollständig berücksichtigt. (Ältere Literatur siehe auch BIEBERBACH, Enzyklopädieartikel.)