

Praktische Funktionenlehre

Von

Dr.-Ing. habil. Friedrich Tölke VDI

o. Professor für Technische Mechanik,
Höhere Festigkeitslehre und Wasserbauliche Strömungslehre
an der Technischen Hochschule Berlin

Erster Band

Elementare und elementare transzendente Funktionen
(Unterstufe)

Mit 62 Abbildungen und
31 durchgerechneten Beispielen



Berlin
Springer-Verlag
1943

ISBN-13: 978-3-642-98171-5
DOI: 10.1007/978-3-642-98982-7

e-ISBN-13: 978-3-642-98982-7

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten
Copyright 1943 by Springer-Verlag OHG., Berlin**

Vorwort.

Seitdem E. JAHNKE und insbesondere F. EMDE mit ihren einzigartigen durch Formeln, Kurven und räumliche Schaubilder ergänzten Tafelwerken die mathematisch hochentwickelte Funktionentheorie weiten Kreisen von Ingenieuren und Physikern erschlossen haben, zeigt sich auf zahlreichen Gebieten der Technik ein immer fühlbarer werdendes Bedürfnis nach einer weit ausholenden Darstellung der Praktischen Funktionenlehre.

Es ist in der heutigen Zeit nicht mehr tragbar, daß hochwertigste technische Kräfte bei der Inangriffnahme neuer Probleme immer wieder gezwungen sind, sich mit der Lösung von Integralen, Differential- und Integralgleichungen abzuquälen, die längst technisches Allgemeinut sein könnten, oder infolge Mangel an Besserem zu ungeeigneten oder fehlerhaften Funktionentafeln greifen müssen, welche die Gefahr des völligen Leerlaufs der angestellten Berechnungen in sich bergen.

In dieser Erkenntnis habe ich vor einiger Zeit den Entschluß gefaßt, ein den heutigen technischen Bedürfnissen angepaßtes Lehr- und Nachschlagebuch der Praktischen Funktionenlehre zu schaffen. Es sind zunächst die folgenden sechs Bände vorgesehen:

Band I. Elementare und elementare transzendente Funktionen, Unterstufe.

Band II. Elementare und elementare transzendente Funktionen, Oberstufe.

Band III. Theta-Funktionen.

Band IV. Elliptische Funktionen.

Band V. Hypergeometrische Funktionen und Kugelfunktionen.

Band VI. Zylinderfunktionen.

Meine Assistenten Dr.-Ing. WALTER ERNST, Dr.-Ing. HANS HAGEN und Dipl.-Ing. CHANG WEI hatten die Freundlichkeit, das Manuskript des vorliegenden ersten Bandes zu lesen und sämtliche Formeln und Integrale unabhängig von mir nachzurechnen. In den Händen meines Oberingenieurs Dr.-Ing. KURT HIRSCHFELD lag die Betreuung und Überwachung der für die Berechnung der Funktionentafeln eingesetzten Kräfte. Mein verehrter Kollege, Herr Professor Dr.-Ing. E. BRENECKE, Direktor des Geodätischen Institutes der Technischen Hochschule Berlin, hatte die Freundlichkeit, mir in Herrn Vermessungsinspektor KRAMM einen Mitarbeiter zur Verfügung zu stellen, der, in seltenem Maße zahlenmäßig begabt, die Zuverlässigkeit der Funktionentafeln weitgehend sicherstellte. Ich kann jedenfalls versichern, daß alles Menschenmögliche getan wurde, um der Fachwelt ein möglichst verlässliches Werk zu übergeben.

Es ist mir ein besonderes Bedürfnis, den genannten Herren meinen Dank für ihre selbstlose Mitarbeit auszusprechen. Ferner danke ich auch den studentischen Mitarbeitern, den Herren E. W. LINDOW, E. IWANOFF, M. V. BODNARESCU und R. SCHULZ, sowie Herrn Dipl.-Ing. CHANG WEI, Frau Dr. rer. nat. CHANG-LU HSIU-CHEN und den Herren ECKHARD, FRANKE und NEUHAUS für das Lesen der Korrektur.

Schließlich gedenke ich noch dankbar des Verständnisses und Weitblickes, den ich beim Springer-Verlag fand. Ohne diesen Weitblick wäre es wohl kaum möglich gewesen, ein so schwieriges Manuskript im gegenwärtigen Augenblicke zu verlegen und den besten Traditionen des Springer-Verlages gemäß auszustatten.

Charlottenburg, im September 1942.

F. TÖLKE.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Erster Abschnitt.

Definierende Differential- und Integralgleichungen, Fundamenteigenschaften und gegenseitige Beziehungen der elementaren und elementaren transzendenten Funktionen.

✓ 1. GAUSSsche Differentialgleichung und hypergeometrische Reihen	1···2
2. Die Exponentialfunktionen	2···6
a) Definierende Integralgleichung und Potenzreihenentwicklung	2···3
b) Differential- und Integralformeln	3
c) Definierende Differentialgleichungen	3···4
d) Beispiel 1	4···5
e) Exponentialfunktionen als Lösungen von Differentialgleichungen höherer Ordnung	5
f) Produkte von Exponentialfunktionen	6
g) Potenzen von Exponentialfunktionen	6
3. Die Logarithmusfunktion	6···7
a) Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion	6
b) Differential- und Integralformeln, Potenzreihenentwicklung	6
c) Definierende Differentialgleichung	7
d) Logarithmus von Produkten und Potenzen	7
4. Die Potenzfunktion	7···9
a) Darstellung durch Exponential- und Logarithmusfunktion	7
b) Differential- und Integralformeln	7
c) Potenzfunktionen als Lösungen der gleichdimensionalen Differentialgleichung	8
✓ d) Potenzfunktionen und GAUSSsche Differentialgleichung	8···9
e) Produkte und Potenzen von Potenzfunktionen	9
5. Die Kreisfunktionen	9···18
a) Definierende Differentialgleichung und Potenzreihenentwicklung der cosinus- und sinus-Funktion	9
b) Differential- und Integralformeln	9···10
c) MOIVRESche Formel	10
d) Additionstheoreme der cosinus- und sinus-Funktion	10
e) Verschiedene Lösungsformen der definierenden Differentialgleichung	10···11
f) Integralgleichungen der cosinus- und sinus-Funktion	11···13
g) Zusammenhang mit der Differentialgleichung der harmonischen Schwingungen. Beispiel 2.	13···14
h) cosinus- und sinus-Funktion als Koordinaten des Einheitskreises. Funktionsverlauf im Reellen	15
i) tangens- und cotangens-Funktion. Definitionsgleichungen und Additionstheoreme	15
k) tangens- und cotangens-Funktion. Differential- und Integralformeln	15···16
l) Differential- und Integralgleichungen der tangens- und cotangens-Funktion	16
m) Potenzreihenentwicklung der tangens- und cotangens-Funktion	16···17
n) Funktionsverlauf der tangens- und cotangens-Funktion im Reellen	17
o) Funktionalbeziehungen zwischen den Kreisfunktionen	17···18
6. Die Kreisfunktionen mit der Phase $\frac{\pi}{4}$	18···21
a) Definitionsgleichungen und Wechselbeziehungen	18
b) Differential- und Integralformeln	18···19
c) Potenzreihenentwicklungen	19
d) Funktionalbeziehungen	20···21
7. Die Hyperbelfunktionen	21···27
a) Definitionsgleichungen der Cosinus- und Sinus-Funktion. Potenzreihenentwicklungen	21
b) Differential- und Integralformeln der Cosinus- und Sinus-Funktion	21
c) Differential- und Integralgleichungen der Cosinus- und Sinus-Funktion	21···22
d) Additionstheoreme der Cosinus- und Sinus-Funktion	22
e) Cosinus- und Sinus-Funktion als Koordinaten der Einheitshyperbel. Funktionsverlauf im Reellen	22
f) Beispiel 3	23···24
g) Beispiel 4	25
h) Tangens- und Cotangens-Funktion. Definitionsgleichungen und Additionstheoreme	25
i) Tangens- und Cotangens-Funktion. Differential- und Integralbeziehungen	26
k) Potenzreihenentwicklung der Tangens- und Cotangens-Funktion	26
l) Funktionsverlauf der Tangens- und Cotangens-Funktion	26

m) Beziehungen zwischen Hyperbel- und Exponentialfunktionen	26
n) Periodenverhalten der Exponential- und Hyperbelfunktionen	26...27
o) Beziehungen zwischen Hyperbel- und Kreisfunktionen	27
p) Funktionalbeziehungen der Hyperbelfunktionen	27
8. Die arcus-Funktionen und Area-Funktionen	28...36
a) Definitionsgleichungen und Verlauf im Reellen	28...29
b) Differential- und Integralformeln	29...30
c) Zusammenhänge der Area-Funktionen mit der Logarithmusfunktion	30
d) Darstellung einiger Logarithmusintegrale	31
e) Funktionalbeziehungen der arcus- und Area-Funktionen	31
f) Additionstheoreme der arcus- und Area-Funktionen	32...33
g) Arc sinus- und $\mathcal{A}r$ Sinus-Funktion als hypergeometrische Reihen	33...34
h) Potenzreihendarstellungen von arc sinus- und $\mathcal{A}r$ Sinus-Funktion	34
i) Komplexe Transformationen zwischen arc sinus- und $\mathcal{A}r$ Sinus-Funktion	34
k) $\mathcal{A}r$ Tangens- und arc tangens-Funktion als hypergeometrische Reihen	34...35
l) Potenzreihendarstellungen von arc tangens- und $\mathcal{A}r$ Tangens-Funktion	35
m) Komplexe Transformationen zwischen arc tangens- und $\mathcal{A}r$ Tangens-Funktion	35
n) Reihenentwicklungen und komplexe Transformationen für arc cotangens- und $\mathcal{A}r$ Cotangens Funktion	35...36
9. Die hyperbolische Amplitudenfunktion und ihre Umkehrung	36...37
a) Definition der hyperbolischen Amplitudenfunktion	36
b) Reelle Wechselbeziehungen zwischen Kreis- und Hyperbelfunktionen	36
c) Umkehrung der hyperbolischen Amplitudenfunktion	36...37
d) Potenzreihenentwicklung von Amplitudenfunktion und Umkehrfunktion	37
10. Trigonometrisch-exponentielle und hyperbolisch-exponentielle Produktfunktionen	37...43
a) Definierende simultane Differential- und Integralgleichungen	37...38
b) Differential- und Integralformeln	38...39
c) Funktionsverlauf im Reellen	39...40
d) Definierende Differentialgleichungen zweiter Ordnung	41...42
e) Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	42...43
11. Trigonometrisch-hyperbolische Produktfunktionen	43...56
a) Definierende simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung	43...45
b) Funktionsverlauf im Reellen	45...46
c) Differential- und Integralformeln	46...47
d) Definierende Differentialgleichung vierter Ordnung	47...49
e) Trigonometrisch-hyperbolische und trigonometrisch-exponentielle Produktfunktionen vom Argument $\frac{z}{\sqrt{2}}$	49...50
f) Beispiel 5	50...53
g) Beispiel 6	53...55
h) Beispiel 7	55...56
12. Transformation der Differentialgleichungen von 11	56...61
a) Simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rein trigonometrischen Lösungen	56...57
b) Allgemeine Lösung der simultanen Differentialgleichungen $\frac{d^2 u}{dz^2} \pm au \pm b'v = 0, \frac{d^2 v}{dz^2} \pm av \pm bu = 0$	57...59
c) Allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\frac{d^4 w}{dz^4} \pm 2a \frac{d^2 w}{dz^2} + (a^2 - z^2)w = 0$	59
d) Beispiel 8	59...61
13. Durch Potenzfunktionen abgewandelte trigonometrisch-exponentielle Produktfunktionen	61...64
14. <u>Trigonometrisch-hyperbolische Algebra</u>	64...68
a) Additions- und Produktformeln	64...65
b) Funktionen des doppelten Arguments	65...66
c) Funktionen des dreifachen Arguments	66
d) Funktionen des n -fachen Arguments	66...67
e) Funktionen des halben Arguments	68

Zweiter Abschnitt.

Durch elementare und elementare transzendente Funktionen ausdrückbare Integrale.

1. Integrale der Klasse $\int \frac{(a+bz)^{\lambda-1}}{(c+dz)^{\lambda+1}} dz$	69...73
a) Algebraische Integrale	69
b) Trigonometrische Integrale	70...72
c) Hyperbolische Integrale	72...73
2. Integrale der Klasse $\int (a+bz)^{\lambda} (c+dz)^{\mu} dz$	73...99
a) Algebraische Integrale	73...81

b) Trigonometrische Integrale	82	91
c) Hyperbolische Integrale	91	99
3. Integrale der Klasse $\int \frac{dz}{(a + bz)^m (c + dz)^n}$	100	110
a) Algebraische Integrale	100	102
b) Trigonometrische Integrale	102	106
c) Hyperbolische Integrale	106	110
4. Integrale der Klasse $\int \frac{A_{m+n} z^{m+n} + A_{m+n-1} z^{m+n-1} + \dots + A_1 z + A_0}{z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \dots + B_1 z + B_0} dz$	110	125
5. Integrale der Klasse $\int \frac{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \dots + A_1 z + A_0}{B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \dots + B_1 z + B_0} \frac{dz}{z^2 - 2az + b}$	125	142
a) Algebraische Integrale	125	130
b) Trigonometrische Integrale	130	136
c) Hyperbolische Integrale	136	142
6. Integrale der Klasse $\int z^n T(z) dz$	142	156
a) Exponentialintegrale	142	143
b) Trigonometrische Integrale	143	144
c) Hyperbolische Integrale	144	146
d) Logarithmische Integrale	146	150
e) Area-Integrale	150	152
f) Arcus-Integrale	152	154
7. Sonderintegrale	155	156

Dritter Abschnitt.

Funktionentafeln der elementaren Transzendenten.

1. Grundtafel der elementaren transzendenten Funktionen	157	158
2. Tafel der Exponential- und Kreisfunktionen	158	
3. Tafel der Funktionen $Ei(x)$, $Ei(-x)$, $\text{Si}(x)$, $\text{Ci}(x)$, $\text{Si}(x)$, $\text{Ci}(x)$	159	
4. Beispiele zur Anwendung der Tafeln	159	167
5. Zahlenwerte der Tafel 1	168	207
6. Zahlenwerte der Tafel 2	208	247
7. Zahlenwerte der Tafel 3	248	257
8. Hilfstafeln der Exponential- und Kreisfunktionen	258	259
9. Tafeln ganzer oder gebrochener Vielfacher von π bzw. $\frac{1}{\pi}$	259	260
10. Tafeln häufig vorkommender Fakultäten	260	
11. Tafeln der Binomialkoeffizienten	260	
12. Häufig vorkommende Zahlenwerte	261	