

Springer-Lehrbuch

Springer

Berlin

Heidelberg

New York

Barcelona

Hongkong

London

Mailand

Paris

Singapur

Tokio

Konrad Königsberger

Analysis 1

Vierte, neu bearbeitete
und erweiterte Auflage

Mit 141 Abbildungen
und 250 Aufgaben mit Lösungen



Springer

Prof. Dr. Konrad Königsberger
Mathematisches Institut
der Technischen Universität München
Arcisstraße 21
D-80333 München

Mathematics Subject Classification (1991): 26, 26A

ISBN-13: 978-3-540-66153-5 e-ISBN-13: 978-3-642-98067-1

DOI: 10.1007/978-3-642-98067-1

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Königsberger, Konrad: Analysis / Konrad Königsberger. –
Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris;
Singapur; Tokio: Springer (Springer-Lehrbuch) Literaturangaben
1.–4., neubearb. u. erw. Aufl. – 1999

ISBN-13: 978-3-540-66153-5

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990, 1992, 1995, 1999

Vorwort zur vierten Auflage

In der neuen Auflage wurde der gesamte Text noch einmal sorgfältig überarbeitet und in einigen Teilen straffer und schärfer gefaßt. Der Themenkreis der globalen Approximation von Funktionen erhielt in der Faltung mit Dirac-Folgen eine wesentliche Vereinheitlichung und Vertiefung. Entsprechend wurde für die Fouriertheorie die Faltung mit Fejér-Kernen an die Spitze der Betrachtung gestellt.

Einem vielfach geäußerten Wunsch entsprechend habe ich in der neuen Auflage Lösungen zu den etwa 250 Übungsaufgaben erstellt und in einem Anhang zusammengefaßt. Bei der Anfertigung unterstützten mich meine Mitarbeiter Herr Dr. Th. Honold, Frau Dr. M. Rösler und Herr Dr. G. Zumbusch. Herr Dr. T. Theobald hat große Teile des Textes nochmals aufmerksam gelesen und dabei manchen Fehler ausgemerzt. Ihnen allen bin ich zu großem Dank verpflichtet. Ein ganz besonderes Wort des Dankes aber schulde ich meinem studentischen Mitarbeiter Niklas Beisert. Mit seinem hohen technischen Können und seinem ausgeprägten Sinn für Gestaltung meisterte er in unermüdlichem Einsatz und sorgfältig mitdenkend die umfangreiche Arbeit am Computer.

München, im Juli 1999

Konrad Königsberger

Vorwort zur dritten Auflage

Für die neue Auflage wurde der gesamte Text gründlich überarbeitet. Ich habe einen Abschnitt über summierbare Familien aufgenommen und das Kapitel über elementar integrierbare Differentialgleichungen ergänzt. Ferner wurde die Behandlung der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen zusammengezogen. Schließlich habe ich konsequent die Klasse der Funktionen, die Stammfunktionen von Regelfunktionen sind, siehe 11.4, ins Spiel gebracht. Diese Klasse ist umfangreicher als die Klasse der stetigen, stückweise stetig differenzierbaren Funktionen. Ihr großer Nutzen für die elementare Analysis und auch für zahlreiche Anwendungen wird oft zu wenig beachtet.

Bei der Überarbeitung hat mich eine Reihe von Mitarbeitern mit Rat und Tat unterstützt. Herr Dipl.-Mathematiker M. Kahlert hat die gesamte Druckvorlage einschließlich aller Abbildungen mit hervorragender Sachkenntnis, großem Engagement und feinem Gespür neu gestaltet. Ihm möchte ich an dieser Stelle besonders herzlich danken. Herr Dr. Th. Honold, Frau cand. math. H. Mündlein und Frau Dipl.-Mathematikerin B. Mayer-Eggert lasen mit viel Sorgfalt die Korrekturen. Hierfür und für manche weitere Hilfe und Anregung danke ich auch ihnen sehr herzlich.

München, im Juli 1995

Konrad Königsberger

Vorwort zur zweiten Auflage

Die positive Aufnahme meiner Analysis 1 veranlaßt den Verlag, bereits nach kurzer Zeit eine neue Auflage herauszubringen. In dieser habe ich lediglich einige kleine Berichtigungen vorgenommen. Für Hinweise dazu danke ich an dieser Stelle den aufmerksamen Lesern.

München, im Januar 1992

Konrad Königsberger

Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Buch ist der erste Teil einer zweibändigen Darstellung der reellen Analysis. Es ist aus einer Vorlesung entstanden und beinhaltet den kanonischen Stoff der Analysiskurse des ersten Semesters an deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen, dazu einfache Differentialgleichungen, Fourierreihen und ein größeres Kapitel über differenzierbare Kurven. Eingeflochten sind auch einige Perlen der elementaren Analysis: der Beweis von Niven für die Irrationalität von π , die Hurwitzsche Lösung zum isoperimetrischen Problem, die Eulersche Summenformel sowie die Gammafunktion nach Artin. Die numerische Seite der Analysis wird wiederholt angesprochen unter Anerkennung der Existenz des Computers. Zahlreiche Beispiele, Aufgaben und historische Anmerkungen ergänzen den Text.

Besonderen Wert habe ich darauf gelegt, zentrale Gegenstände aus sachbezogenen Fragestellungen heraus zu entwickeln. Bei der Einführung der elementaren Funktionen wird der Kenner auch neue Varianten finden. Der Begriff der Stammfunktion ist etwas allgemeiner und flexibler als üblich

gefaßt. Im übrigen habe ich in diesem ersten Teil der Analysis abstrakte Begriffsbildungen sehr maßvoll verwendet.

Zum Schluß möchte ich all meinen Mitarbeitern danken, die mich mit Rat und Tat unterstützten. Insbesondere hat Herr Dr. G. Fritz das Manuskript mit Engagement und kritischer Sorgfalt durchgesehen und zahlreiche Verbesserungen angeregt. Die Erstellung von T_EX-Makros und die umfangreiche Arbeit der Textgestaltung führte Herr Dipl.-Mathematiker S. Büddefeld mit großer Sachkenntnis, Zuverlässigkeit und unermüdlicher Geduld aus. Herr Dr. Th. Dietmair las Korrekturen und fertigte einen erheblichen Teil der Abbildungen an. Herzlich danke ich auch meiner Frau, der Hüterin meiner Arbeitsruhe. Schließlich gilt mein Dank dem Springer-Verlag für die vertrauensvolle Zusammenarbeit.

München, im Juli 1990

Konrad Königsberger

Inhaltsverzeichnis

1	Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	1
1.1	Vollständige Induktion	1
1.2	Fakultät und Binomialkoeffizienten	2
1.3	Aufgaben.....	5
2	Reelle Zahlen	7
2.1	Die Körperstruktur von \mathbb{R}	7
2.2	Die Anordnung von \mathbb{R}	8
2.3	Die Vollständigkeit von \mathbb{R}	10
2.4	\mathbb{R} ist nicht abzählbar	16
2.5	Aufgaben.....	18
3	Komplexe Zahlen	20
3.1	Der Körper der komplexen Zahlen	20
3.2	Die komplexe Zahlenebene	22
3.3	Algebraische Gleichungen in \mathbb{C}	24
3.4	Die Unmöglichkeit einer Anordnung von \mathbb{C}	26
3.5	Aufgaben.....	26
4	Funktionen	28
4.1	Grundbegriffe	28
4.2	Polynome	32
4.3	Rationale Funktionen	35
4.4	Aufgaben.....	39
5	Folgen	41
5.1	Konvergenz von Folgen.....	41
5.2	Rechenregeln	43
5.3	Monotone Folgen	46
5.4	Eine Rekursionsfolge zur Berechnung von Quadratwurzeln	48

5.5	Der Satz von Bolzano-Weierstraß	50
5.6	Das Konvergenzkriterium von Bolzano-Cauchy. Nochmals die Vollständigkeit von \mathbb{R}	52
5.7	Uneigentliche Konvergenz	54
5.8	Aufgaben.....	55
6	Reihen	59
6.1	Konvergenz von Reihen	59
6.2	Konvergenzkriterien	61
6.3	Summierbare Familien	66
6.4	Potenzreihen	74
6.5	Aufgaben.....	77
7	Stetige Funktionen. Grenzwerte	80
7.1	Stetigkeit.....	80
7.2	Rechnen mit stetigen Funktionen	83
7.3	Erzeugung stetiger Funktionen durch normal konvergente Reihen	84
7.4	Stetige reelle Funktionen auf Intervallen. Der Zwischenwertsatz	86
7.5	Stetige Funktionen auf kompakten Mengen. Der Satz vom Maximum und Minimum	88
7.6	Anwendung: Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra	92
7.7	Stetige Fortsetzung. Grenzwerte von Funktionen	93
7.8	Einseitige Grenzwerte. Uneigentliche Grenzwerte	97
7.9	Aufgaben.....	100
8	Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen	103
8.1	Definition der Exponentialfunktion	103
8.2	Die Exponentialfunktion für reelle Argumente.....	107
8.3	Der natürliche Logarithmus	110
8.4	Exponentialfunktionen zu allgemeinen Basen. Allgemeine Potenzen	112
8.5	Binomialreihen und Logarithmusreihe	114
8.6	Definition der trigonometrischen Funktionen	117
8.7	Nullstellen und Periodizität	119
8.8	Die Arcus-Funktionen.....	122
8.9	Polarkoordinaten komplexer Zahlen.....	123
8.10	Geometrie der Exponentialabbildung. Hauptzweig des komplexen Logarithmus und des Arcustangens	125

8.11	Die Zahl π	129
8.12	Die hyperbolischen Funktionen	131
8.13	Aufgaben	133
9	Differentialrechnung	137
9.1	Die Ableitung einer Funktion	137
9.2	Ableitungsregeln	141
9.3	Mittelwertsatz und Schrankensatz	144
9.4	Beispiele und Anwendungen	147
9.5	Reihen differenzierbarer Funktionen	152
9.6	Ableitungen höherer Ordnung	154
9.7	Konvexität	157
9.8	Konvexe Funktionen und Ungleichungen	160
9.9	Fast überall differenzierbare Funktionen. Verallgemeinerter Schrankensatz	163
9.10	Der Begriff der Stammfunktion	166
9.11	Eine auf ganz \mathbb{R} stetige, nirgends differenzierbare Funktion ...	167
9.12	Aufgaben	169
10	Lineare Differentialgleichungen	173
10.1	Eindeutigkeitssatz und Dimensionsabschätzung	173
10.2	Ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung	176
10.3	Partikuläre Lösungen bei speziellen Inhomogenitäten	180
10.4	Anwendung auf Schwingungsprobleme	182
10.5	Partikuläre Lösungen bei allgemeinen Inhomogenitäten	185
10.6	Erweiterung des Lösungsbegriffes	187
10.7	Aufgaben	189
11	Integralrechnung	191
11.1	Treppenfunktionen und ihre Integration	191
11.2	Regelfunktionen	193
11.3	Integration der Regelfunktionen über kompakte Intervalle ...	196
11.4	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Stammfunktionen zu Regelfunktionen	199
11.5	Erste Anwendungen	206
11.6	Integration elementarer Funktionen	208
11.7	Integration normal konvergenter Reihen	214
11.8	Riemannsche Summen	216
11.9	Integration über nicht kompakte Intervalle.	218
11.10	Die Eulersche Summationsformel	223
11.11	Aufgaben	229

12	Geometrie differenzierbarer Kurven	233
12.1	Parametrisierte Kurven. Grundbegriffe.....	233
12.2	Die Bogenlänge	238
12.3	Parameterwechsel.....	242
12.4	Krümmung ebener Kurven	243
12.5	Die Sektorfläche ebener Kurven	246
12.6	Kurven in Polarkoordinaten	249
12.7	Liftung und Windungszahlen	252
12.8	Noch ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra	255
12.9	Geometrie der Planetenbewegung. Die drei Keplerschen Gesetze.....	256
12.10	Aufgaben.....	258
13	Elementar integrierbare Differentialgleichungen	262
13.1	Wachstumsmodelle. Lineare und Bernoullische Gleichungen...	262
13.2	Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen	266
13.3	Nicht-lineare Schwingungen. Die Differentialgleichung $\ddot{x} = f(x)$	273
13.4	Aufgaben.....	279
14	Lokale Approximation von Funktionen. Taylorpolynome und Taylorreihen	282
14.1	Approximation durch Taylorpolynome	282
14.2	Taylorreihen. Rechnen mit Potenzreihen	286
14.3	Bernoulli-Zahlen und Cotangensreihe. Bernoulli-Polynome	289
14.4	Das Newton-Verfahren	292
14.5	Aufgaben.....	298
15	Globale Approximation von Funktionen. Gleichmäßige Konvergenz	300
15.1	Gleichmäßige Konvergenz	300
15.2	Vertauschungssätze	303
15.3	Kriterien für gleichmäßige Konvergenz	305
15.4	Anwendung: die Eulerschen Formeln für $\zeta(2n)$	309
15.5	Approximation durch Faltung mit Dirac-Folgen	310
15.6	Lokal gleichmäßige Konvergenz. Der Überdeckungssatz von Heine-Borel	314
15.7	Aufgaben.....	316

Inhaltsverzeichnis	XIII
16 Approximation periodischer Funktionen. Fourierreihen	319
16.1 Der Approximationssatz von Fejér	319
16.2 Definition der Fourierreihen. Erste Beispiele und Anwendungen	323
16.3 Punktweise Konvergenz nach Dirichlet	328
16.4 Die Besselsche Approximation periodischer Funktionen	330
16.5 Fourierreihen stückweise stetig differenzierbarer Funktionen	333
16.6 Konvergenz im quadratischen Mittel. Die Parsevalsche Gleichung	336
16.7 Anwendung: das isoperimetrische Problem	340
16.8 Wärmeleitung in einem Ring. Die Thetafunktion	341
16.9 Aufgaben	345
17 Die Gammafunktion	347
17.1 Die Gammafunktion nach Gauß	347
17.2 Charakterisierung der Γ -Funktion nach Bohr-Møllerup. Die Eulersche Integraldarstellung	351
17.3 Die Stirlingsche Formel	353
17.4 Aufgaben	356
Biographische Notiz zu Euler	357
Lösungen zu den Aufgaben	358
Literatur	399
Bezeichnungen	400
Namen- und Sachverzeichnis	402