

Springer-Lehrbuch

Springer

Berlin

Heidelberg

New York

Barcelona

Budapest

Hongkong

London

Mailand

Paris

Santa Clara

Tokio

Thomas Westermann

Mathematik für Ingenieure mit Maple

Band 2:

Differential- und Integralrechnung für
Funktionen mehrerer Variablen,
gewöhnliche und partielle Differential-
gleichungen, Fourier-Analysis

Mit 240 Abbildungen,
369 Aufgaben und
Lösungen



Springer

Professor Dr. Thomas Westermann
Fachhochschule Karlsruhe
Hochschule für Technik
Fb. Naturwissenschaften
Postfach 2440
76012 Karlsruhe
E-mail: westermann@fh-karlsruhe.de

ISBN-13: 978-3-540-61248-3

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme
Mathematik für Ingenieure mit Maple / Thomas Westermann. - Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Budapest ; Hongkong ; London ; Mailand ; Paris ; Santa Clara ; Tokyo : Springer.

(Springer-Lehrbuch)

Bd. 2. Differential- und Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variablen, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Fourier-Analyse.

Buch ..-1997

Additional material to this book can be downloaded from <http://extra.springer.com>.

ISBN-13: 978-3-540-61248-3 e-ISBN-13: 978-3-642-97945-3

DOI: 10.1007/978-3-642-97945-3

CD-ROM...-1997

ISBN-13: 978-3-540-61248-3

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für die Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage des Autors

Umschlaggestaltung: Design & Production, Heidelberg

SPIN 10538615

62/3020 - 5 4 3 2 1 0 - Gedruckt auf säurefreiem Papier

Vorwort

Dieses zweibändige Lehr- und Übungsbuch wendet sich an alle Studenten der Natur- und technischen Ingenieurwissenschaften an Fachhochschulen. Auch Studenten der technischen Studiengängen an Universitäten können es während ihrer mathematischen Grundausbildung mit Erfolg verwenden.

Aufbauend auf den ersten Band, der die Grundlagen der Mathematik für Ingenieure enthält, behandelt dieser zweite Band fortgeschrittene Themengebiete wie die mehrdimensionale Analysis, die gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen sowie die Laplace- und Fourieranalyse. Diese Inhalte sowie deren rechnerische Umsetzung stellen heutzutage unverzichtbare Standardmethoden für Ingenieure dar.

Die Themengebiete sind wieder so aufbereitet, daß Studenten sie auch im Selbststudium leicht bearbeiten können. Im zweiten Band sind mehr als 270 Beispiele ausführlich durchgerechnet und zusätzlich 200 Aufgaben mit Lösungen angegeben. Wichtige Formeln und Lehrsätze werden deutlich hervorgehoben, um die Lesbarkeit des Buches zu erhöhen. Mehr als 360 Abbildungen und Skizzen tragen dem Lehrbuchcharakter Rechnung. Wieder wird das Computeralgebrasystem MAPLE benutzt, um wichtige Begriffe und Zusammenhänge zu visualisieren und komplizierte Beispiele zu vereinfachen. MAPLE wird aber nicht vorausgesetzt.

Ein besonderes Anliegen des Autors war auch in diesem Band, durch anwendungsorientierte Beispiele den Bezug zu den Ingenieurwissenschaften herzustellen, um so den Zugang zu den mathematischen Themen zu erleichtern sowie die Relevanz der Inhalte zu demonstrieren. Viele der Anwendungsbeispiele gehen auf Vorschläge meines geschätzten Kollegen Prof. Dr. R. Keßler zurück, bei dem ich mich an dieser Stelle ausdrücklich bedanken möchte.

Um den ständig wachsenden Gebrauch von Rechnern und numerischen Problemlösungen zu berücksichtigen, wurden für alle Kapitel rechnerische Lösungsmethoden und Algorithmen in dieses Mathematikbuch aufgenommen. Auf Beweise wurde fast gänzlich verzichtet.

Obwohl die unterschiedlichen Stadien der Manuskripte oftmals Korrektur gelesen wurden, lassen sich Fehler bei der Abfassung eines umfangreichen Textes nicht vermeiden. Über Hinweise auf noch vorhandene Fehler ist der Autor dankbar. Aber auch Verbesserungsvorschläge, nützliche Hinweise und erfrischende Anregungen besonders von studentischen Kreisen sind sehr erwünscht und können dem Autor z.B. über westermann@fh-karlsruhe.de oder per Post zugesendet werden.

Das vorliegende Buch wurde vollständig in \LaTeX unter dem Textverarbeitungsprogramm *Scientific WorkPlace* erstellt. Ohne die zuverlässige Mithilfe und Mitarbeit vieler bereitwilliger Helfer wäre dieser zweite Band in seiner vorliegenden Form nicht möglich gewesen. Die zahlreichen Übungsaufgaben entstanden unter Mithilfe von Dipl.-Math. C.P. Hugelmann. Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn F. Wohlfarth und Frau Raviol für die präzise und fehlerfreie Erstellung des \LaTeX -Quelltextes mit all den vielen Formeln, den Herren M. Baus und F. Loeffler für die exzellente Erstellung der meisten Skizzen und Bilder unter CorelDraw, so wie der Autor sie sich vorgestellt hat. Mein Dank gilt auch dem Springer-Verlag für die angenehme und reibungslose Zusammenarbeit, speziell Herrn Dr. Merkle.

Zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die nochmals die Vernachlässigung durch die zeitintensive Arbeit an diesem Buch mitgetragen hat.

Karlsruhe, im Februar 1997

Thomas Westermann

Hinweise zum Gebrauch dieses Buches

Vorkenntnisse: Der Leser sollte mit den Themen aus Band 1 vertraut sein, insbesondere mit der Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen.

Darstellung: Neu eingeführte Begriffe werden *kursiv* im Text markiert und zu meist in einer Definition **fett** spezifiziert. Lehrsätze, wichtige Formeln und Zusammenfassungen sind durch Umrahmungen besonders gekennzeichnet. Am Ende eines jeden Kapitels befinden sich Übungsaufgaben, deren Lösungen im Anhang angegeben sind. Bei der Erarbeitung der Themengebiete wurde versucht, jeweils eine anwendungsorientierte Problemstellung voranzustellen und anschließend auf die allgemeine mathematische Struktur überzugehen. Die Thematik wird dann innerhalb der Mathematik behandelt und anhand von mathematischen Beispielen erläutert. Neben der Behandlung der Problemstellungen mit MAPLE werden aussagekräftige Anwendungsbeispiele diskutiert. Algorithmische Aspekte und die rechnerische Umsetzung ergänzen in eigenständigen Abschnitten die Kapitel.

Beispiele: Die zahlreichen Beispiele sind für den Zugang zu den Themengebieten unverzichtbar. Beim Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung sollten möglichst die mathematischen Beispiele eigenständig bearbeitet werden. Wer dieses Werk als Nachschlagewerk benutzt kann sich an den eingerahmten Definitionen, Sätzen und Zusammenfassungen orientieren.

MAPLE: Dieses Buch ist ein Lehrbuch über Mathematik und kann **ohne** Rechner zum Erlernen von mathematischem Grundwissen oder zur Prüfungsvorbereitung herangezogen werden. Die MAPLE-Animationen stellen aber einen neuen didaktischen Ansatz dar, der zum besseren Verständnis der Inhalte beiträgt. Alle MAPLE-Befehle sind im Text **fett** hervorgehoben; die MAPLE-Syntax erkennt man an der Eingabeaufforderung ">" zu Beginn einer Zeile. Diese MAPLE-Zeilen sind im Textstil **sans serif** angegeben und können direkt in MAPLE eingegeben werden. Am Ende der Kapitel steht eine Zusammenfassung der benutzten Befehle.

CD-ROM: Auf der CD-ROM befinden sich zwei Demoversionen von MAPLE: für Rel. 3.0 und Rel. 4.0. Sie sind vorinstalliert und können sofort aufgerufen werden. Es besteht aber auch die Möglichkeit, sie auf der Festplatte zu installieren. Die umfangreichen MAPLE-Worksheets sind auf der CD-ROM enthalten, so daß der interessierte Leser die im Text entwickelten Methoden umsetzen bzw. an abgeänderten Beispielen erproben kann. Es wird besonders auf die vielen Animationen hingewiesen, die allerdings nicht alle mit der mitgelieferten Demoversion aktiviert werden können (→ vgl. Anhang B).

Inhaltsverzeichnis

Kapitel X: Funktionen von mehreren Variablen	1
§1. Differentialrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	1
1.1 Einführung und Beispiele	1
1.2 Stetigkeit	11
1.3 Partielle Ableitung	13
1.4 Totale Differenzierbarkeit	21
1.5 Gradient und Richtungsableitung	24
1.6 Kettenregeln	31
1.7 Der Taylorsche Satz	36
§2. Anwendungen der Differentialrechnung	43
2.1 Das Differential als lineare Näherung	43
2.2 Fehlerrechnung	49
2.3 Lokale Extrema bei Funktionen mit mehreren Variablen	54
2.4 Ausgleichen von Meßfehlern; Regressionsgerade	65
§3. Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	73
3.1 Doppelintegrale (Gebietsintegrale)	73
3.2 Dreifachintegrale	86
3.3 Linien- oder Kurvenintegrale	100
3.4 Oberflächenintegrale	117
Zusammenstellung der MAPLE-Befehle	124
Aufgaben zu Funktionen von mehreren Variablen	129
Kapitel XI: Gewöhnliche Differentialgleichungen	135
§1. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung	135
1.1 Einleitung und Beispiele	135
1.2 Lineare DG 1. Ordnung	138
1.3 Lineare DG 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	147
1.4 Nichtlineare DG 1. Ordnung	151
1.5 Lösen von DG 1. Ordnung mit MAPLE	158
§2. Lineare Differentialgleichungssysteme	162
2.1 Einführung	162
2.2 Homogene lineare Differentialgleichungssysteme	164
2.3 Eigenwerte und Eigenvektoren	169
2.4 Eigenwerte und Eigenvektoren mit MAPLE	173
2.5 Lösen von homogenen LDGS	175
2.6 Berechnung spezieller Lösungen mit MAPLE	187
§3. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	198
3.1 Einleitende Beispiele	198
3.2 Reduktion einer DG n -ter Ordnung auf ein System	200
3.3 Homogene DG n -ter Ordnung	205
3.4 Inhomogene DG n -ter Ordnung	215
3.5 Lösen von DG n -ter Ordnung mit MAPLE	228

§4.	Numerische Lösung von Anfangswertproblemen 1. Ordnung	233
4.1	Streckenzugverfahren von Euler	233
4.2	Verfahren höherer Ordnung	236
4.3	Quantitativer Vergleich der numerischen Verfahren	242
4.4	Numerisches Lösen von DG 1. Ordnung mit MAPLE	246
§5.	Numerisches Lösen von DG für elektrische Filter	253
5.1	Physikalische Gesetzmäßigkeiten der Bauelemente	254
5.2	Aufstellen der DG für elektrische Schaltungen	254
5.3	Aufstellen und Lösen der DG für Filterschaltungen	255
	Zusammenstellung der MAPLE-Befehle	266
	Aufgaben zu Differentialgleichungen	268
Kapitel XII: Die Laplace-Transformation		273
§1.	Die Laplace-Transformation	275
§2.	Inverse Laplace-Transformation	280
§3.	Berechnung der Laplace-Transformation und Inversen mit MAPLE	282
§4.	Zwei grundlegende Eigenschaften der Laplace-Transformation . . .	285
4.1	Linearität	285
4.2	Laplace-Transformierte der Ableitung	287
§5.	Transformationssätze	290
5.1	Verschiebungssatz	290
5.2	Dämpfungssatz	293
5.3	Ähnlichkeitssatz	294
5.4	Faltungssatz	295
5.5	Grenzwertsätze	298
§6.	Methoden der Rücktransformation	299
§7.	Anwendungen der Laplace-Transformation mit MAPLE	301
	Zusammenstellung der MAPLE-Befehle	312
	Aufgaben zur Laplace-Transformation	313
Kapitel XIII: Fourierreihen		316
§1.	Einführung	316
§2.	Bestimmung der Fourierkoeffizienten	318
§3.	Fourierreihen für 2π -periodische Funktionen	321
§4.	Fourierreihen für p -periodische Funktionen	329
§5.	Fourierreihen für komplexwertige Funktionen	340
§6.	Zusammenstellung elementarer Fourierreihen	347
	Zusammenstellung der MAPLE-Befehle	349
	Aufgaben zu Fourierreihen	349
Kapitel XIV: Fouriertransformation		351
§1.	Fouriertransformation und Beispiele	351
1.1	Übergang von der Fourierreihe zur Fouriertransformation . . .	351
1.2	Inverse Fouriertransformation	355

§2.	Eigenschaften der Fouriertransformation	359
2.1	Linearität	359
2.2	Symmetrieeigenschaft	360
2.3	Skalierungseigenschaft	361
2.4	Verschiebungseigenschaften	362
2.5	Modulationseigenschaft	364
2.6	Fouriertransformation der Ableitung	366
2.7	Faltungstheorem	367
§3.	Fouriertransformation mit MAPLE	374
§4.	Fouriertransformation der Deltafunktion	380
4.1	Deltafunktion und Darstellung der Deltafunktion	380
4.2	Fouriertransformation der Deltafunktion	382
4.3	Darstellung der Deltafunktion mit MAPLE	385
§5.	Beschreibung von linearen Systemen	390
5.1	LZK-Systeme	390
5.2	Impulsantwort	392
5.3	Die Systemfunktion (Übertragungsfunktion)	398
5.4	Übertragungsfunktion elektrischer Netzwerke	402
5.5	Zusammenhang zwischen der Sprung- und Deltafunktion ...	407
§6.	Anwendungsbeispiele mit MAPLE	412
6.1	Frequenzanalyse des Doppelpendelsystems	412
6.2	Frequenzanalyse eines Hochpasses	415
§7.	Diskrete Fouriertransformation	418
7.1	Herleitung der Formeln der DFT	418
7.2	Inverse diskrete Fouriertransformation	422
§8.	Diskrete Fouriertransformation mit MAPLE	429
§9.	Anwendungsbeispiele zur DFT mit MAPLE	436
9.1	Anwendung der DFT zur Signalanalyse	436
9.2	Anwendung der DFT zur Systemanalyse	442
	Zusammenstellung der MAPLE-Befehle	447
	Aufgaben zur Fouriertransformation	448
Kapitel XV: Partielle Differentialgleichungen		453
§1.	Einführung	453
§2.	Die Wellengleichung	455
2.1	Herleitung der Wellengleichung	455
2.2	Unendlich ausgedehnte Saite (Anfangswertproblem)	456
2.3	Eingespannte Saite (Anfangsrandwertproblem)	458
2.4	Visualisierung mit MAPLE	464
§3.	Die Wärmeleitungsgleichung	466
3.1	Herleitung der Wärmeleitungsgleichung	466
3.2	Lösung der Wärmeleitungsgleichung bei Wärmeisolation ...	467
3.3	Lösung der Wärmeleitungsgleichung bei Wärmeisolation ...	472
3.4	Lösung des stationären Falls bei Wärmeübergang	474

§4.	Die Laplace-Gleichung	478
4.1	Herleitungen der Laplace-Gleichung	478
4.2	Lösung der Laplace-Gleichung (Dirichlet-Problem)	481
4.3	Lösung der Laplace-Gleichung (Neumann-Problem)	485
4.4	Die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten (r, φ)	487
§5.	Die zweidimensionale Wellengleichung	490
§6.	Die Biegeschwingungsgleichung	494
6.1	Herleitung der Biegeschwingungsgleichung	494
6.2	Lösung der Biegeschwingungsgleichung	495
6.3	Einspannbedingung: gelenkig/gelenkig	498
6.4	Einspannbedingung: fest/fest	500
	Aufgaben zu partiellen DG	505
Kapitel XVI: Vektoranalysis und Integralsätze		508
§1.	Divergenz und Satz von Gauß	509
1.1	Die Divergenz	509
1.2	Gaußscher Integralsatz	513
§2.	Rotation und Satz von Stokes	516
2.1	Die Rotation	516
2.2	Stokescher Integralsatz	521
§3.	Rechnen mit Differentialoperatoren	523
§4.	Anwendung: Die Maxwellschen Gleichungen	529
	Zusammenstellung der MAPLE-Befehle	532
	Aufgaben zur Vektoranalysis	533
Anhang A: Lösungen zu den Übungsaufgaben		535
Anhang B: Die CD-ROM		548
Literaturverzeichnis		553
Index		555

Inhalt von Band 1

Kapitel I: Zahlen, Gleichungen und Gleichungssysteme

- §1. Mengen
- §2. Natürliche Zahlen
- §3. Reelle Zahlen
- §4. Gleichungen und Ungleichungen mit MAPLE
- §5. Lineare Gleichungssysteme
- §6. Lösen von linearen Gleichungssystemen mit MAPLE

Kapitel II: Vektorrechnung

- §1. Vektoren im \mathbb{R}^2
- §2. Vektoren im \mathbb{R}^3
- §3. Vektoralgebra mit MAPLE
- §4. Geraden und Ebenen im \mathbb{R}^3
- §5. Vektorräume

Kapitel III: Matrizen und Determinanten

- §1. Matrizen
- §2. Determinanten
- §3. Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Kapitel IV: Elementare Funktionen

- §1. Grundbegriffe und allgemeine Funktionseigenschaften
- §2. Polynome
- §3. Rationale Funktionen
- §4. Potenz- und Wurzelfunktionen
- §5. Exponential- und Logarithmusfunktion
- §6. Trigonometrische Funktionen

Kapitel V: Komplexen Zahlen

- §1. Darstellung komplexer Zahlen
- §2. Komplexe Rechenoperationen
- §3. Komplexe Rechnung mit MAPLE
- §4. Anwendungen
- §5. Übertragungsfunktionen von RCL-Filterschaltungen

Kapitel VI: Differential- und Integralrechnung

- §1. Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion
- §2. Differentialrechnung
- §3. Integralrechnung

Kapitel VII: Funktionenreihen

- §1. Zahlenreihen
- §2. Potenzreihen
- §3. Taylorreihen
- §4. Anwendungen
- §5. Komplexwertige Funktionen

Kapitel VIII: Numerisches Lösen von Gleichungen

- §1. Intervallhalbierungs-Methode
- §2. Pegasus-Verfahren
- §3. Banachsches Iterationsverfahren
- §4. Newton-Verfahren
- §5. Regula falsi
- §6. Bestimmung von Polynom-Nullstellen

Kapitel IX: Numerische Differentiation und Integration

- §1. Numerische Differentiation
- §2. Numerische Integration