

Springer-Lehrbuch



Kurt Meyberg · Peter Vachenauer

Höhere Mathematik 1

Differential- und Integralrechnung
Vektor- und Matrizenrechnung

Mit 438 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo Hong Kong

Professor Dr. Kurt Meyberg
Dr. Peter Vachenauer
Mathematisches Institut
der Technischen Universität München
Arcisstraße 21
8000 München 2

1. korrigierter Nachdruck 1990

Mathematics Subject Classification (1980): 00A05, 00-01, 00A06

ISBN-13: 978-3-540-51798-6 e-ISBN-13: 978-3-642-97214-0
DOI: 10.1007/978-3-642-97214-0

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Meyberg, Kurt: Höhere Mathematik / Kurt Meyberg; Peter Vachenauer. – Berlin; Heidelberg; New York;
London; Paris; Tokyo; Hong Kong: Springer.
(Springer-Lehrbuch)

NE: Vachenauer, Peter:

1. Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung. – 1. korr. Nachdr. – 1990

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der Fassung vom 24. Juni 1985 zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990

Datenkonvertierung: H. Stürtz AG, Würzburg

2144/3140-543210 Gedruckt auf säurefreiem Papier

Vorwort

Dieses zweibändige Lehrbuch ist aus den Vorlesungen und Übungen der Verfasser zur Höheren Mathematik für Ingenieure der Fachrichtungen Maschinenbau und Elektrotechnik an der Technischen Universität München hervorgegangen. Es ist in erster Linie als kompakter Begleittext zur viersemestrigen Grundvorlesung für die Studenten der Ingenieurwissenschaften und anderer technisch-physikalischer Studienfächer (etwa Physik, Technomathematik und Informatik) konzipiert.

Da die moderne Technik vom Ingenieur immer umfassendere und tiefere mathematische Kenntnisse verlangt, gehen wir an einigen Stellen über den üblichen Vorlesungsstoff der Grundkurse hinaus oder stellen einige Themen gründlicher dar, als es in den Vorlesungen möglich ist. Das betrifft im vorliegenden Band insbesondere in Kapitel 6 den Ausflug in die abstrakte Welt der Vektorräume und in allen Kapiteln die stärkere Berücksichtigung der wichtigsten numerischen Aspekte. Damit ist dieses Buch auch für Studenten höherer Semester zur Fortbildung und für den Praktiker als Nachschlagewerk geeignet.

Die in Kapitel 1 dargestellte Vektorrechnung, insbesondere die Behandlung gebundener Vektoren, ist den Bedürfnissen der Technischen Mechanik angepaßt, sie kann für andere Fachrichtungen abgekürzt oder ausgelassen werden. Andererseits besteht die Notwendigkeit, die algebraischen und numerischen Methoden bereits in den Grundkursen stärker zu berücksichtigen. Die Lineare Algebra in Kapitel 6 ist unabhängig vom Vorhergehenden und kann vorgezogen, eventuell parallel mit den Kapiteln 2–5 behandelt werden.

Der Praktiker erwartet von der Mathematik nicht nur Erkenntnis, sondern Resultate. Wir berücksichtigen die für ihn besonders wichtige algorithmische Seite der Mathematik durch im Druck hervorgehobene Überblicke mit detaillierten Rechenschemata. Sie enthalten – in Schritten aufgegliedert – die Methoden zum Lösen konkreter Aufgaben und können nicht zuletzt als Repetitorium zur Prüfungsvorbereitung dienen.

Ferner fügen wir eine größere Zahl von Programmen ein, die auf erprobten numerischen Algorithmen fußen. Wir haben uns zur Darstellung dieser Programme für die Programmiersprache GfA-Basic entschieden, da diese einerseits die zugrundeliegenden Algorithmen besonders gut erkennen läßt, andererseits aufgrund ihrer Strukturierung vom etwas geübten Programmierer leicht in jede höhere Sprache übersetzt werden kann. In erster Linie ist aber an den Einsatz der Programme auf studienbegleitenden Taschen- oder Kleinrechnern gedacht.

Für den verständnisvollen Umgang mit den mathematischen Modellen der Physik und der Technik reicht die Fähigkeit im Anwenden fertiger Rezepte natürlich nicht aus. Unerläßlich ist auch die Kenntnis der mathematischen Grundlagen

und vielfältigen Methoden, mit denen sie behandelt werden. Wir haben deshalb alle wesentlichen Beweise ausgeführt. Der Studienanfänger kann einen Teil dieser Beweise und die mit * gekennzeichneten Abschnitte beim ersten Durcharbeiten auslassen; er sollte sich dafür verstärkt mit den zahlreichen ausführlich vorgerechneten Beispielen und den einfacheren Übungsaufgaben beschäftigen. Der etwas geübtere Leser wird die straffe Darstellung der anspruchsvolleren Beweise sicher schätzen. Für ihn sollten auch die schwierigeren Aufgaben eine Herausforderung bedeuten.

Die Verfasser sind den Kollegen und Mitarbeitern an der Technischen Universität München sehr dankbar, die durch ihre Hilfe, manch guten Rat und viele Gespräche über Inhalte und Darstellung der „Ingenieurmathematik“ zum Entstehen dieses Buches beigetragen haben. Insbesondere danken wir Prof. Dr. CHR. REINSCH, Prof. Dr. H.J. KROLL, Dr. S. WALCHER, Dipl. Math. M. BINDER, Dipl. Math. H. GRADL, Dipl. Math. R. NIEMCZYK, Dipl. Math. ST. SAUTTER und Dipl. Math. A. HUNDEMER, sie haben die Teile des Manuskripts gelesen, zahlreiche Druckfehler entdeckt und wertvolle Verbesserungsvorschläge beigetragen.

Da sowohl ein studentenfreundlicher Preis als auch eine für die gute Verständlichkeit nötige, hohe Druckqualität angestrebt wurden, haben wir uns sofort nach Bekanntwerden dafür entschieden, die Druckvorlagen mit der vom Druckhaus STUERTZ angebotenen hochauflösenden Monotype-Variante von T_EX zu erzeugen. Daß sich dieser Entschluß trotz der anfangs zusätzlichen Pionierarbeit doch gelohnt hat, ist vor allem das Verdienst von Frau cand.math. I. ABOLD; sie hat den T_EX-Quelltext mit Präzision, Geschmack und viel Einfallsreichtum erstellt und dabei nie ihre lebenswürdige Geduld verloren. Ihr gilt unser besonderer Dank.

Ein Teil der Abbildungen konnte von cand.ing. R. MATTUSCHAT auf einem 3D-CAD-Rechensystem am Lehrstuhl für Konstruktion im Maschinenbau erstellt werden. Wir danken Prof. Dr. K. EHRENSPIEL für das freundliche Entgegenkommen. Ebenso dankend erwähnen wir die Studentinnen und Studenten T. ERIS, K. MATTUSCHAT und Frau cand.inf. A. SCHRAMM, die zusammen mit CHR. VACHENAUER die Skizzen für die übrigen Graphiken hingebungs- und kunstvoll auf den Bildschirm des ATARI-ST umsetzten.

Schließlich gilt unser Dank auch dem Springer-Verlag für die stets vorbildliche Zusammenarbeit, speziell Herrn Dr. J. HEINZE, der die verschiedenen Entstehungsphasen dieses Buches mit lebhaft förderndem Interesse, Geduld und fachmännischem Rat verfolgt hat.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Zahlen und Vektoren	1
§1. Mengen und Abbildungen	1
1.1 Mengen – 1.2 Mengenoperationen – 1.3 Abbildungen	
§2. Die reellen Zahlen	3
2.1 Bezeichnungen – 2.2 Ungleichungen – 2.3 Intervalle – 2.4 Schranken – 2.5 Der Betrag – 2.6 Die vollständige Induktion – 2.7 Binomialkoeffizienten und die binomische Formel – Aufgaben	
§3. Die Ebene	11
3.1 Kartesische Koordinatensysteme – 3.2 Winkel – 3.3 Sinus, Cosinus – 3.4 Drehungen	
§4. Vektoren	17
4.1 Kartesische Koordinatensysteme im Raum – 4.2 Vektoren – 4.3 Die Addition von Vektoren – 4.4 Die skalaren Vielfachen eines Vektors – 4.5 Der Betrag – 4.6 Vektoren im Koordinatensystem	
§5. Produkte	22
5.1 Der Winkel zwischen zwei Vektoren – 5.2 Das Skalarprodukt – 5.3 Das Vektorprodukt – 5.4 Das Spatprodukt – Aufgaben	
§6. Geraden und Ebenen	34
6.1 Parameterdarstellungen einer Geraden – 6.2 Die Koordinatengleichungen einer Geraden – 6.3 Die Momentengleichung der Geraden – 6.4 Abstand Punkt-Gerade – 6.5 Abstand Gerade-Gerade – 6.6 Parameterdarstellungen einer Ebene – 6.7 Parameterfreie Darstellungen einer Ebene – 6.8 Die Gerade als Schnitt zweier Ebenen – 6.9 Die Winkel zwischen zwei Ebenen und zwischen einer Ebene und einer Geraden – Aufgaben	
§7. Gebundene Vektoren	47
7.1 Gebundene Vektoren – 7.2 Ein System gebundener Vektoren – 7.3 Die Reduktion eines Systems gebundener Vektoren – Aufgaben	
§8. Die komplexen Zahlen	53
8.1 Die Menge der komplexen Zahlen – 8.2 Die vier Grundrechenarten in \mathbb{C} – 8.3 Die Konjugation und der Betrag komplexer Zahlen – 8.4 Anwendungen	

Kapitel 2. Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit	58
§1. Funktionen (Grundbegriffe)	58
1.1 Funktionen – 1.2 Monotonie – 1.3 Das Rechnen mit Funktionen	
§2. Polynome und rationale Funktionen	61
2.1 Polynome – 2.2 Polynomnullstellen – Faktorisierung – 2.3 Polynominterpolation – 2.4 Der Graph – 2.5 Rationale Funktionen, Polynomdivision – 2.6 Der Definitionsbereich D – 2.7 Ergänzung: Polynome über \mathbb{C} – Aufgaben	
§3. Die Kreisfunktionen	75
3.1 Definition und einfache Eigenschaften – 3.2 Die Tangens- und Cotangensfunktion – 3.3 Die Polardarstellung komplexer Zahlen – 3.4 Anwendungen der De Moivre-Formeln – 3.5 Harmonische Schwingungen – Aufgaben	
§4. Zahlenfolgen und Grenzwerte	88
4.1 Folgen – 4.2 Definition des Grenzwerts; konvergente Zahlenfolgen	
§5. Rechenregeln für Grenzwerte und Konvergenzkriterien	93
5.1 Rechenregeln – 5.2 Grenzwertbestimmung durch Abschätzung – 5.3 Monotone Folgen – 5.4 Die Exponentialfunktion – 5.5 Für Fortgeschrittene: Das Cauchy-Konvergenzkriterium – Aufgaben	
§6. Funktionengrenzwerte, Stetigkeit	103
6.1 Definitionen – 6.2 Die 6 elementaren Methoden der Grenzwertbestimmung – 6.3 Asymptoten – 6.4 Stetigkeit – Aufgaben	
Kapitel 3. Differentiation	112
§1. Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion	112
1.1 Die Definition der Ableitung – 1.2 Die geometrische Deutung der Ableitung: Tangentenanstieg – 1.3 Die analytische Deutung der Ableitung: Lineare Approximation – 1.4 Die physikalische Deutung der Ableitung: Geschwindigkeit – 1.5 Stetigkeit ist notwendig für Differenzierbarkeit – 1.6 Differentiationsregeln – 1.7 Die Differentiation der Polynome und der rationalen Funktionen – 1.8 Die Ableitung der Kreisfunktionen – 1.9 Die Kettenregel – 1.10 Höhere Ableitungen – Aufgaben	
§2. Anwendungen der Differentiation	121
2.1 Maxima und Minima einer Funktion – 2.2 Der Mittelwertsatz – 2.3 Wendepunkte – 2.4 Die Regeln von De L'Hospital – 2.5 Kurvendiskussion – 2.6 Nullstellen und Fixpunkte – 2.7 Kubische Splines – Aufgaben	

§3. Umkehrfunktionen	139
3.1 Grundlagen – 3.2 n -te Wurzel, rationale Exponenten – 3.3 Arcussinus, Arcuscosinus, Arcustangens – Aufgaben	
§4. Die Exponential- und Logarithmusfunktion	147
4.1 Die e -Funktion – 4.2 Die Kurve $y = e^x$ – 4.3 Exponentiell wachsende bzw. fallende Prozesse – 4.4 Der natürliche Logarithmus – 4.5 Allgemeine Exponentialfunktionen und Logarithmen – 4.6 Die Hyperbelfunktionen \sinh , \cosh , \tanh – Aufgaben	
Kapitel 4. Integration	161
§1. Das bestimmte Integral	161
1.1 Die Definition des bestimmten Integrals – 1.2 Die geometrische Deutung – 1.3 Elementare Integrationsregeln und der Mittelwertsatz – 1.4 Differentiation und Integration – Aufgaben	
§2. Integrationsregeln	169
2.1 Linearität – 2.2 Partielle Integration – 2.3 Die Substitutionsmethode – 2.4 Symmetrien beachten – 2.5 Ausblicke – Aufgaben	
§3. Die Integration der rationalen Funktionen	179
3.1 Die Partialbruchzerlegung – 3.2 Die Integration – 3.3 Die Integration von $R(e^x)$ – 3.4 Die Integration von $R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)$, $ae-bc \neq 0$ – 3.5 Die Integration von $R(\sin x, \cos x)$ – 3.6 Trigonometrische und hyperbolische Substitutionen – Aufgaben	
§4. Uneigentliche Integrale	185
4.1 Die Definition der uneigentlichen Integrale – 4.2 Ein Konvergenz-Test – 4.3 Ein an beiden Grenzen uneigentliches Integral – 4.4 Ausnahmestellen im Innern des Integrationsintervalls – Aufgaben	
§5. Kurven, Längen- und Flächenmessung	190
5.1 Die Parameterdarstellung – 5.2 Tangente und Normale – 5.3 Kurvenlänge – 5.4 Krümmung und Krümmungskreis – 5.5 Die Polardarstellung einer ebenen Kurve – 5.6 Flächeninhalte – Aufgaben	
§6. Weitere Anwendungen des Integrals	204
6.1 Abkürzende Redeweisen – 6.2 Das Volumen eines Rotationskörpers – 6.3 Die Mantelfläche – Aufgaben	
§7. Numerische Integration	206
Aufgaben	

Kapitel 5. Potenzreihen	212
§1. Unendliche Reihen	212
1.1 Grundbegriffe – 1.2 Absolute Konvergenz – Aufgaben	
§2. Reihen von Funktionen	221
2.1 Gleichmäßige Konvergenz – 2.2 Gleichmäßig konvergente Funktionenreihen – Aufgaben	
§3. Potenzreihen	226
3.1 Der Konvergenzradius – 3.2 Berechnung des Konvergenzradius – 3.3 Die Differentiation und Integration von Potenzreihen – 3.4 Die Potenzreihendarstellung einiger Funktionen – 3.5 Die Binomialreihe – 3.6 Potenzreihen mit dem Zentrum $a \neq 0$ – 3.7 Koeffizientenvergleich – Aufgaben	
§4. Der Satz von Taylor; Taylor-Reihen	237
4.1 Die Taylor-Formel – 4.2 Die Taylor-Reihe – 4.3 Methoden der Reihenentwicklung – Aufgaben	
§5. Anwendungen (an Beispielen)	244
5.1 Grenzwertberechnungen – 5.2 Näherungsformeln (Approximation) – 5.3 Die Reihendarstellung und Berechnung einer Integralfunktion mit nicht elementar integrierbarem Integranden – 5.4 Potenzreihenansatz zur Lösung einfacher Differentialgleichungen – Aufgaben	
 Kapitel 6. Lineare Algebra	 250
§1. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	250
1.1 Was ist eine Matrix? – 1.2 Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einem Zahlenfaktor – 1.3 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen – 1.4 Das Gaußsche Lösungsverfahren – Aufgaben	
§2. Die Matrizenmultiplikation	265
2.1 „Zeile mal Spalte“ – 2.2 Die Multiplikation zweier Matrizen – 2.3 Rechenregeln – 2.4 Die Transponierte einer Matrix – 2.5 Invertierbare Matrizen – 2.6 Diagonal- und Dreiecksmatrizen – Aufgaben	
§3. Vektorräume	274
3.1 Der „abstrakte“ Vektorraum – 3.2 Unterräume, Linearkombinationen, lineare Hülle – 3.3 Basis und Dimension – Aufgaben	
§4. Elementarmatrizen und elementare Umformungen	286
4.1 Zeilenraum und Spaltenraum – 4.2 Elementarmatrizen – 4.3 Der Rang und die P - Q -Normalform – 4.4 Rechenverfahren – Aufgaben	

§5. Determinanten	299
5.1 Einführung – 5.2 Definition der Determinante einer $n \times n$ -Matrix – 5.3 Rechenregeln für Determinanten – 5.4 Die Entwicklung von $\det A$ nach einer beliebigen Zeile oder Spalte – 5.5 Beispiele – 5.6 Anwen- dungen – Aufgaben	
§6. Lineare Abbildungen und Eigenwerte	311
6.1 Lineare Abbildungen – 6.2 $V = W = \mathbb{R}^n$ – 6.3 Längen und Winkel im \mathbb{R}^n ; Orthogonalität – 6.4 Speziell: Spiegelungen und Drehungen – 6.5 Das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren – 6.6 Basiswechsel, Koordinatentransformation – 6.7 Eigenwerte, Eigenvektoren – 6.8 Die orthogonale Gruppe – Aufgaben	
§7. Symmetrische Matrizen und quadratische Formen	339
7.1 Quadratische Formen – 7.2 Die Hauptachsentransformation – 7.3 Quadriken – 7.4 Die nichtorthogonale Diagonalisierung einer sym- metrischen Matrix – 7.5 Positiv definite Matrizen – Aufgaben	
Kapitel 7. Funktionen in mehreren Variablen: Differentiation	359
§1. Kurven im \mathbb{R}^n	360
1.1 Parameterdarstellungen – 1.2 Das begleitende Dreibein, Krümmung, Torsion – 1.3 Ergänzung: Der natürliche Parameter und die Frenet- schen Formeln – Aufgaben	
§2. Reellwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher	370
2.1 Grundlagen – 2.2 Grenzwerte und Stetigkeit – 2.3 Partielle Ablei- tungen, der Gradient – 2.4 Die totale Ableitung und lineare Approxi- mation – 2.5 Einfache Anwendungen – 2.6 Die Richtungsableitung, der Anstieg und die Kettenregel – Aufgaben	
§3. Anwendungen der Differentiation	391
3.1 Die Bedeutung des Gradienten – 3.2 Approximation höherer Ord- nung; die Taylor-Formel – 3.3 Implizite Funktionen – 3.4 Lokale Mi- nima und Maxima – 3.5 Ausgleichsrechnung – 3.6 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen – Aufgaben	
§4. Vektorwertige Funktionen	418
4.1 Die Differentiation – 4.2 Die Kettenregel – 4.3 Räumliche Skalaren- und Vektorfelder – 4.4 Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace- Operator – Aufgaben	

Kapitel 8. Funktionen in mehreren Variablen: Integration	430
§1. Parameterintegrale	430
1.1 Parameterintegrale – Aufgaben	
§2. Kurvenintegrale	435
2.1 Das Kurvenintegral einer skalaren Funktion – 2.2 Anwendungen – 2.3 Die Integration eines Vektorfeldes längs einer Kurve – 2.4 An- wendungen und Beispiele – 2.5 Das Potential eines Gradientenfeldes – 2.6 Die praktische Bestimmung eines Potentials ($n = 3$) – Aufgaben	
§3. Die Integration über ebene Bereiche	454
3.1 Der Flächeninhalt – 3.2 Definition und einfache Eigenschaften des Doppelintegrals – 3.3 Die Berechnung des Doppelintegrals in kartesi- schen Koordinaten – 3.4 Weitere Anwendungen und Beispiele – 3.5 Der Satz von Green – Aufgaben	
§4. Die Integration über Flächen im Raum	467
4.1 Parameterdarstellungen – 4.2 Beispiele – 4.3 Der Flächeninhalt – 4.4 Das Oberflächenintegral einer skalaren Funktion – 4.5 Die Trans- formationsformel für Gebietsintegrale – 4.6 Das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes – 4.7 Der Satz von Stokes – Aufgaben	
§5. Die Integration über dreidimensionale Bereiche	488
5.1 Definition und einfache Eigenschaften des Dreifachintegrals – 5.2 Einfache Anwendungsbeispiele – 5.3 Die Transformationsformel für Volumenintegrale – 5.4 Der Divergenzsatz – 5.5 Einige Anwendungen der Integralsätze – 5.6 Orthogonale krummlinige Koordinaten – Auf- gaben	
Literaturverzeichnis	505
Namen- und Sachverzeichnis	507

Inhalt von Band 2

Fourier-Reihen, Laplace- und Fourier-Transformation, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, komplexe Funktionen, Variationsrechnung.

Verzeichnis der Programme

1. Programm HORNER	63
Auswertung eines Polynoms mit dem Horner-Schema	
2. Programm HORNER vollstaendig.....	63
Entwicklung eines Polynoms nach Potenzen von $x - b$	
3. Programm NEWTON Interpolation.....	68
Berechnung und Auswertung des Newton-Interpolationspolynoms	
4. Programm BISEKTION.....	109
Nullstellenbestimmung ($f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$)	
5. Programm NEWTON-Verfahren.....	134
Nullstellenbestimmung ($f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$)	
6. Programm KUBISCHE SPLINE.....	136
Interpolation mit kubischer Spline-Funktion	
7. Programm ROMBERG Integration.....	209
Berechnung von $\int_a^b f(x)dx$ mittels Romberg-Extrapolation	
8. Programm Vollst. Ellipt. Integrale.....	211
Berechnung der vollständigen elliptischen Integrale $E(k)$ und $K(k)$ mit arithmetisch-geometrischem Mittel	
9. Programm GAUSS.....	296
Lösung des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit verbesserter LR-Zerlegung, Berechnung der Determinante von A	
10. Programm LEVERRIER.....	333
Berechnung der Koeffizienten des Polynoms $p(\lambda) = \det(\lambda E - A)$	
11. Programm JACOBI	354
Berechnung aller Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix	
12. Programm BAIRSTOW.....	384
Berechnung aller komplexen Nullstellen eines reellen Polynoms	

13. Procedure LINFIT.....	406
Bestimmung der Ausgleichslösung eines überbestimmten linearen Gleichungssystems	
14. Programm NLSQ.....	407
Bestimmung der Ausgleichslösung eines überbestimmten nichtlinearen Gleichungssystems	