

# Anwendungsorientierte Mathematik

Vorlesungen und Übungen für Studierende  
der Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften

Herausgegeben von G. Böhme

Band 1



Gert Böhme

# Algebra

Vierte, verbesserte Auflage

Mit 211 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Professor GERT BÖHME  
Fachhochschule Furtwangen/Schwarzwald  
Fachbereich Allgemeine Informatik

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Böhme, Gert: Anwendungsorientierte Mathematik : Vorlesungen u. Übungen für Studierende d. Ingenieur- u. Wirtschaftswiss. / hrsg. von Gert Böhme. –  
Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer

Bd. 1. – Böhme, Gert: Algebra

Böhme, Gert: Algebra : Vorlesungen u. Übungen für Studierende d. Ingenieur- u. Wirtschaftswiss. /  
Gert Böhme. –

4., verb. Aufl. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1981.

(Anwendungsorientierte Mathematik / hrsg. von G. Böhme ; Bd. 1)

ISBN 978-3-540-10492-6      ISBN 978-3-642-96613-2 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-96613-2

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben auch bei nur auszugsweiser Verwertung vorbehalten. Die Vergütungsansprüche des § 54, Abs. 2 UrhG werden durch die Verwertungsgesellschaft Wort, München, wahrgenommen.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1981

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg 1981

**Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1981**

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buche berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zur Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

# Vorwort zur vierten Auflage

Die grundlegenden Begriffsbildungen der linearen und nichtlinearen Algebra haben seit dem Erscheinen der dritten Auflage ihren Platz in den mathematischen Anfängervorlesungen gefestigt. Die in der Hochschulliteratur sonst nicht übliche Ausführlichkeit der Darstellung ist von den Lesern und der Kritik durchweg positiv aufgenommen worden. Der Text wurde für diese Auflage um eine Einführung in die Graphentheorie sowie einige Beispiele und Aufgaben erweitert. Für wertvolle Anregungen bin ich Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Pelz und Herrn Prof. Dr. H.-V. Niemeier herzlich verbunden. Danken möchte ich auch allen Lesern, die mich auf Schreibfehler aufmerksam machten oder Vorschläge zur Verbesserung des Textes unterbreiteten. Dem Springer-Verlag danke ich für die zügige Herstellung der neuen Auflage.

Furtwangen, im Mai 1981

Gert Böhme

# Vorwort zur dritten Auflage

In zunehmendem Maße gewinnen auch für den Anwender mathematischer Methoden algebraische Denk- und Verfahrensweisen an Bedeutung. Der Kreis der Geistesbereiche, welche sich der Exaktheit und Eindeutigkeit mathematischer Darstellungsformen bedienen, beschränkt sich heute längst nicht mehr auf die klassischen Natur- und Ingenieurwissenschaften, vielmehr ist das mathematische Instrumentarium auch in Wirtschaft, Organisation, Planung und Datenverarbeitung zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden. Dieser Entwicklung muß die mathematische Grundausbildung unserer Ingenieure und Wirtschaftswissenschaftler Rechnung tragen.

Mit dem Titel "Anwendungsorientierte Mathematik" verbinde ich eine konkrete curriculare Konzeption. Sie unterscheidet sich sowohl von der rein theoretischen Darstellung als auch von der angewandten Mathematik, versucht jedoch zwischen beiden didaktischen Standpunkten eine Brücke zu schlagen. Dahinter steht die Erfahrung, daß sinnvolle Anwendung mathematischer Methoden sich nicht auf die verfahrenstechnische Komponente des Problems beschränken kann, sondern ein fundiertes Verständnis des wissenschaftlichen Kerns als notwendige Voraussetzung haben muß.

Im ersten Band sind die wichtigsten Teilgebiete der Algebra behandelt. Ihre Auswahl erfolgte nach anwendungsrelevanten Gesichtspunkten, ihre Darstellung orientiert sich nach Inhalt und Umfang an guter Lesbarkeit und leichter Verständlichkeit. Das bedeutet: bewußter Verzicht auf eine systematisch-geschlossene Abhandlung, Beschränkung auf eine Einführung bei Berücksichtigung relativ geringer Vorkenntnisse, Auflockerung des Textes durch möglichst viele Beispiele, Bezugnahme auf typische Anwendungen aus verschiedenen Gebieten, Veranschaulichung des Textes durch Abbildungen, Ergänzung der Theorie durch Übungsaufgaben (und Lösungen) zu jedem Abschnitt, womit ein Selbststudium des Buches erleichtert wird.

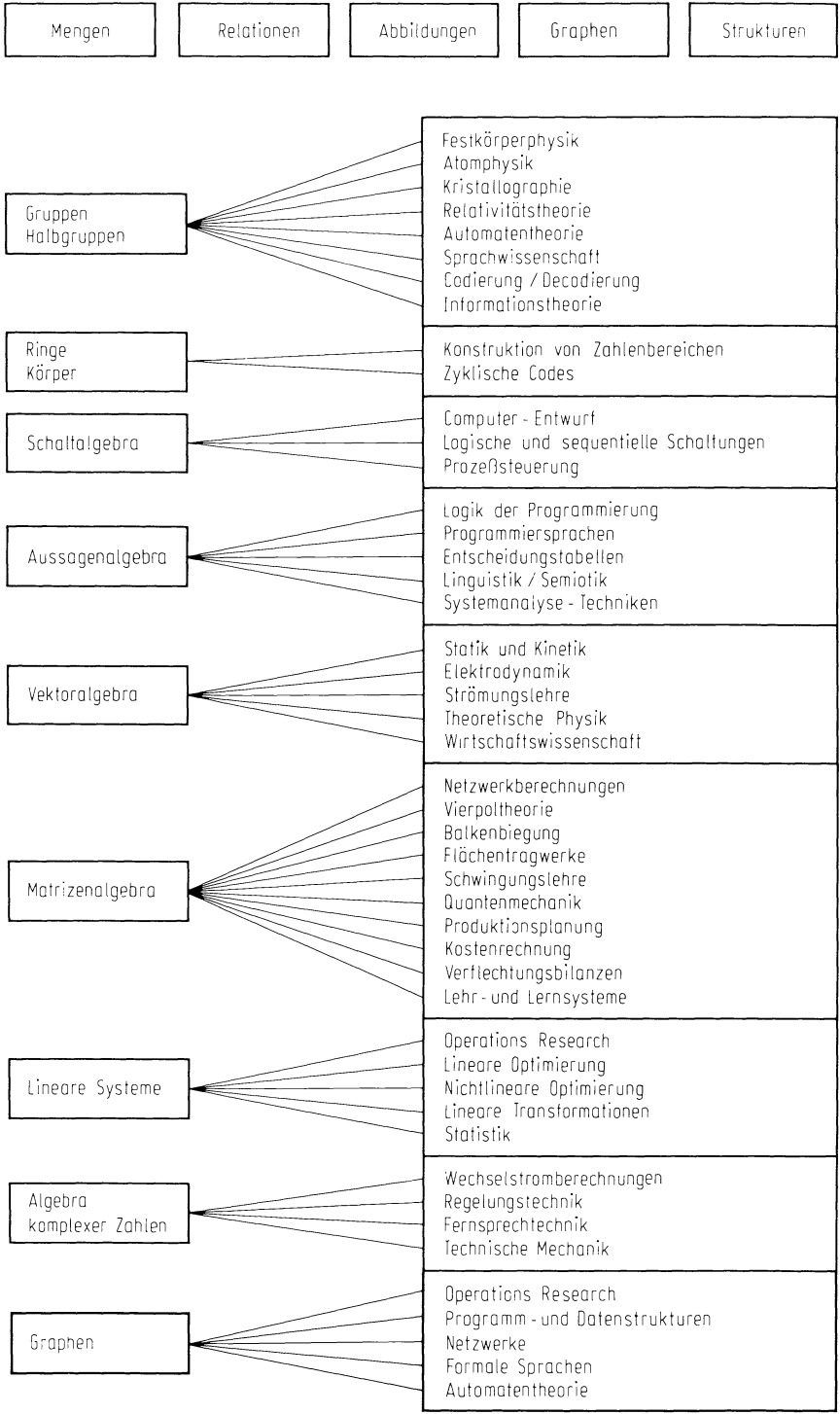
Um jedem Studienanfänger einen Einstieg in die Algebra zu ermöglichen, habe ich die einleitenden Abschnitte über Mengen, Relationen, Abbildungen, Verknüpfungen und Strukturen verhältnismäßig ausführlich gehalten. Diese Themenkreise gehören zwar nach der Reform des Mathematikunterrichts zum Lehrstoff aller Schulen bis zum Abitur, werden jedoch erfahrungsgemäß oft nur unvollständig behandelt. Insbesondere

berücksichtige ich damit auch die bereits im Beruf stehenden Fachleute, die sich an Hand dieses Buches in die moderne Algebra einarbeiten wollen.

Von den Hauptkapiteln finden sich einige bereits längere Zeit in den Lehrplänen der Hochschulen, so etwa die Vektoralgebra, Schaltalgebra, Matrizenrechnung und die Algebra komplexer Zahlen. Sie werden auch hier gebührend behandelt, zugleich jedoch ergänzt und vertieft um einige weitere Themen wie Gruppentheorie, Boolesche und Aussagenalgebra sowie eine gründliche Einführung in die lineare Algebra. Letztere erscheint gemäß der Grundkonzeption dieses Werkes allerdings nicht als eine axiomatisch aufgebaute Theorie der Vektorräume - darüber gibt es genügend andere Veröffentlichungen -, sondern rückt die Behandlung linearer Gleichungssysteme in den Mittelpunkt, ergänzt durch eine Betrachtung linearer Ungleichungssysteme im Hinblick auf die Anwendungen in der linearen Optimierung.

Bei dieser Vielzahl von Einzelgebieten besteht für den Leser leicht die Gefahr, den Überblick aus den Augen zu verlieren und den Inhalt als eine Sammlung zusammenhangloser Einzeldarstellungen aufzufassen. Aus diesem Grund habe ich die Gesamtdarstellung unter einen hierfür geeigneten didaktischen Leitbegriff gestellt: den Begriff der algebraischen Struktur. Sinn und Zweck dieses Vorgehens habe ich in den einzelnen Kapiteln immer wieder transparent gemacht und an möglichst vielen Stellen auch durch konkrete Anwendungen untermauert. Der mündige Student erwartet heute von einer Lehrveranstaltung wie auch von einem guten Lehrbuch eine überzeugende Begründung der curricularen Relevanz des Lehrstoffes in wissenschaftlicher Sicht wie auch im Hinblick auf seine spätere berufliche Tätigkeit. Nicht zuletzt habe ich von daher eine Synopse von sinnvollen Anwendungsmöglichkeiten und wissenschaftlichem Selbstverständnis der Strukturalgebra angestrebt.

Für die Durchsicht des Manuskriptes bin ich Herrn Dr. Niemeier und Herrn Dipl.-Math. Ongyert zu Dank verpflichtet. Anregungen zum Text erhielt ich auch von Herrn Professor Dipl.-Ing. Simon. Meiner Frau bin ich für die mühevollen Anfertigung des Schreibmaschinenmanuskriptes auch dieser Auflage besonders herzlich verbunden. Schließlich habe ich dem Springer-Verlag für sein Verständnis bei der Konzeption der Neufassung sowie für die Summe der mit der Herstellung des Buches verbundenen Arbeiten zu danken.



x

# Inhaltsverzeichnis

<u>1. Grundlagen der Algebra</u> .....	1
1.1 Mengen .....	1
1.1.1 Begriff und Beschreibung einer Menge .....	1
1.1.2 Beziehungen zwischen Mengen .....	3
1.1.3 Verknüpfungen von Mengen .....	8
1.2 Relationen .....	21
1.2.1 Begriff und Beschreibung von Relationen .....	21
1.2.2 Eigenschaften zweistelliger Relationen .....	27
1.2.3 Äquivalenzrelationen .....	36
1.2.4 Ordnungsrelationen .....	41
1.2.5 Verknüpfungen von Relationen .....	46
1.3 Abbildungen .....	52
1.3.1 Der Begriff der Abbildung .....	52
1.3.2 Wichtige Eigenschaften von Abbildungen .....	58
1.3.3 Verknüpfungen von Abbildungen .....	62
1.4 Graphen .....	70
1.4.1 Einführende Erklärungen .....	70
1.4.2 Zusammenhängende Graphen .....	73
1.4.3 Eine Anwendung: Algorithmische Ermittlung eines Minimalgerüsts .....	76
1.5 Strukturen .....	79
1.5.1 Verknüpfungen .....	79
1.5.2 Verknüpfungstreue Abbildungen .....	86
1.5.3 Algebraische Strukturen .....	95
1.6 Gruppen .....	98
1.6.1 Axiome und einfache Eigenschaften .....	98
1.6.2 Permutationen .....	105
1.6.3 Zyklische Gruppen .....	113
1.6.4 Untergruppen .....	119
1.7 Ringe und Körper .....	123



1.8	Boolesche Algebra . . . . .	129
1.8.1	Bedeutung. Axiomatisierung . . . . .	129
1.8.2	Boolesche Terme . . . . .	136
1.8.3	Schaltalgebra . . . . .	144
1.8.4	Aussagenalgebra . . . . .	158
<u>2.</u>	<u>Lineare Algebra</u> . . . . .	167
2.1	Zur Bedeutung der linearen Algebra . . . . .	167
2.2	Determinanten . . . . .	168
2.2.1	Zweireihige Determinanten . . . . .	168
2.2.2	Determinanten n-ter Ordnung . . . . .	179
2.3	Vektoralgebra . . . . .	189
2.3.1	Vektorbegriff. Gruppeneigenschaft. Vektorraum . . . . .	189
2.3.2	Das skalare Produkt . . . . .	197
2.3.3	Das vektorielle Produkt . . . . .	206
2.3.4	Basisdarstellung von Vektoren . . . . .	214
2.3.5	Mehrfache Produkte . . . . .	228
2.4	Matrizenalgebra . . . . .	239
2.4.1	Matrixbegriff. Matrixverknüpfungen . . . . .	239
2.4.2	Matrixinversion. Transponierung . . . . .	253
2.4.3	Orthogonalität. Komplexe Matrizen . . . . .	265
2.5	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	278
2.5.1	Lineare Abhängigkeit. Rangbegriff . . . . .	278
2.5.2	Homogene lineare Systeme . . . . .	290
2.5.3	Inhomogene lineare Systeme . . . . .	301
2.5.4	Lineare Ungleichungssysteme . . . . .	312
<u>3.</u>	<u>Algebra komplexer Zahlen</u> . . . . .	324
3.1	Der komplexe Zahlenkörper . . . . .	324
3.2	Die Normalform komplexer Zahlen . . . . .	330
3.3	Gaußsche Zahlenebene. Betrag. Konjugierung . . . . .	335
3.4	Die trigonometrische Form komplexer Zahlen . . . . .	342
3.5	Die Exponentialform komplexer Zahlen . . . . .	350
3.6	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen im Komplexen . . . . .	360
3.7	Graphische Ausführung der Grundrechenarten mit Zeigern . . . . .	367
<u>4.</u>	<u>Anhang: Lösungen der Aufgaben</u> . . . . .	372
	<u>Sachverzeichnis</u> . . . . .	398

Inhaltsübersicht der weiteren Bände:

Band 2: Analysis 1. Teil

Funktionen - Differentialrechnung

1. Elementare reelle Funktionen
2. Komplexwertige Funktionen
3. Differentialrechnung
4. Anhang: Lösungen der Aufgaben

Band 3: Analysis 2. Teil

Integralrechnung - Reihen - Differentialgleichungen

1. Integralrechnung
2. Unendliche Reihen
3. Gewöhnliche Differentialgleichungen
4. Anhang: Lösungen der Aufgaben

Band 4: Aktuelle Anwendungen der Mathematik

1. Graphen
2. Wortstrukturen
3. Automaten
4. Prognoseverfahren
5. Bestandsoptimierung
6. Anhang: Lösungen der Aufgaben