Mathematik für Physiker und Ingenieure

A. Blickensdörfer-Ehlers W. G. Eschmann
H. Neunzert K. Schelkes

Analysis 1

Ein Lehr- und Arbeitsbuch
für Studienanfänger

Herausgegeben von H. Neunzert

Mit 172 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1980

Arndt Blickensdörfer-Ehlers
Winfried G. Eschmann
Helmut Neunzert
Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern
Postfach 3049
6750 Kaiserslautern

Klaus Schelkes
Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe
Stilleweg 2
3000 Hannover 51

ISBN-13: 978-3-540-10396-7 e-ISBN-13: 978-3-642-96597-5

DOI: 10.1007/978-3-642-96597-5

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Mathematik für Physiker und Ingenieure. – Berlin, Heidelberg, New York : Springer.
→ Analysis 1
Analysis 1: e. Lehr- u. Arbeitsbuch für Studienanfänger / A. Blickensdörfer-Ehlers . . . Hrsg. von H. Neunzert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980.
(Mathematik für Physiker und Ingenieure)

NE: Blickensdörfer-Ehlers, Arndt [Mitverf.]; Neunzert, Helmut [Hrsg.]

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1980

Gesamtherstellung: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
2144/3140-543210

Inhaltsverzeichnis

Vorwort VIII
Wie arbeiten Sie mit diesem Buch? XI

KAPITEL 1. DIE REELLEN ZAHLEN
§ 1 Mengen 1
§ 2 Funktionen 4
Definitionen und Beispiele 4
Die Komposition von Funktionen 6
Die Umkehrfunktion 8
Bijektive Funktionen 9
§ 3 Die reellen Zahlen 10
Die Zahlengerade 10
Die arithmetischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ 10
Ungleichungen 12
Intervalle 16
Definition und Eigenschaften der Wurzel 17
Der Betrag 19
Zusammenfassung 22

KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION
§ 1 Beweis durch vollständige Induktion 24
Erklärung des Summenzeichens 26
§ 2 Rekursive Definitionen 26
§ 3 n-te Potenz und n-te Wurzel 28
Eigenschaften der n-ten Potenz 28
Die n-te Wurzel 30
Die binomische Formel 30
Zusammenfassung 34

KAPITEL 3. DIE KOMPLEXEN ZAHLEN
Einleitung 36
§ 1 Definition und Veranschaulichung 36
§ 2 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen 36
Rechengesetze in $\mathbb{C}$ 36
$\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ 38
§ 3 Realteil, Imaginärteil, Betrag 39
Realteil, Imaginärteil, Konjugierte 39
Der Betrag 40
§ 4 Die Polarform 44
§ 5 n-te Wurzeln einer komplexen Zahl 46
Zusammenfassung 49

KAPITEL 4. REELLE UND KOMPLEXE FUNKTIONEN
Einleitung 50
§ 1 Definition der reellen Funktionen und Beispiele 50
§ 2 Monotone Funktionen 52
§ 3 Beispiele aus der Wechselstromlehre 54
§ 4 Rechnen mit reellen Funktionen 56
§ 5 Polynome 58
Das Horner-Schema 58
Nullstellen von Polynomen 60
§ 6 Komplexe Funktionen 62
Komplexe Funktionen mit reellen Argumenten 64
Zusammenfassung 65

KAPITEL 5. DAS SUPREMUM
Einleitung 66
§ 1 Schranken, Maximum, Minimum, Supremum, Infimum 67
§ 2 Das Supremumsaxiom 70
§ 3 Eigenschaften von Supremum und Infimum 70
§ 4 Supremum und Maximum bei Funktionen 71
§ 5 Dual-, Dezimal- und Hexadezimalzahlen 72
Zusammenfassung 74

KAPITEL 6. FOLGEN
Einleitung 75
§ 1 Definition 75
§ 2 Monotonie und Beschränktheit 76
Beschränktheit 76
Monotonie 76
Monotone beschränkte Folgen 78
§ 3 Konvergenz und Divergenz 80
Konvergenz 80
Divergenz 82
Rechenregeln für konvergente Folgen 82
Beispiele 84
Rekursiv definierte Folgen 86

§ 4 Komplexe Folgen 89
Zusammenfassung 92

Kapitel 7. Einführung in die Integralrechnung
Einleitung 94
§ 1 Beispiele 94
§ 2 Obersumme und Untersumme 98
§ 3 Die Definition des Integrals 102
§ 4 Das Riemannsche Integrabilitätskriterium 104
Integrierbarkeit monotoner Funktionen 106
§ 5 Integral als Grenzwert einer Folge 107
Das Riemannsche Summen-Kriterium 108
§ 6 Numerische Integration 109
Die Rechteckregel 109
Die Trapezregel 110
Die Simpsonregel 111
§ 7 Eigenschaften des Integrals 112
Eigenschaften des Integrals bezüglich des Integrationsintervalls 112
Eigenschaften bezüglich des Integranden 114
Ungleichungen für Integrale 116
Zusammenfassung 117

Kapitel 8. Reihen
Einleitung (Zenon's Paradoxon) 118
§ 1 Beispiele 120
§ 2 Konvergente Reihen 122
Geometrische Reihen 122
Die "Schneeflockenkurve" 123
Rechenregeln für konvergente Reihen 124
Notwendiges Konvergenzkriterium 125
§ 3 Konvergenzkriterien 126
Vergleichskriterien 126
Wurzelkriterium 126
Quotientenkriterium 128
Alternierende Reihen 128
§ 4 Absolut konvergente Reihen 130
Zusammenfassung 133

Kapitel 9. Potenzreihen und spezielle Funktionen
Einleitung 134
§ 1 Potenzreihen 136
Konvergenz von Potenzreihen 136
Zusammenfassung: Potenzreihen als Funktionen 139
§ 2 Exponentialfunktion 140
Definition der Exponentialfunktion 140
Eigenschaften der Exponentialfunktion 140
§ 3 Sinus und Cosinus 142
§ 4 Hyperbelfunktionen 144
Zusammenfassung 146

Kapitel 10. Stetige Funktionen
Einleitung 146
§ 1 Stetigkeit 149
Grenzwerte von Funktionen 149
Einseitige und uneigentliche Grenzwerte 151
Stetige Funktionen 152
Trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktion sind stetig 154
Stetig auf [a,b]: Drei Sätze 156
§ 2 Anwendung auf spezielle Funktionen 161
Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenz 161
Trigonometrische Funktionen 164
§ 3 Die ε-δ-Definition der Stetigkeit und die Lipschitz-Stegigkeit 168
§ 4 Stetigkeit und Integration 171
Zusammenfassung 172

Kapitel 11. Differentialrechnung
Einleitung 174
§ 1 Lineare Approximation 174
§ 2 Definition der Differenzierbarkeit 177
§ 3 Differenzierbare Funktionen 180
§ 4 Rechenregeln für differenzierbare Funktionen 184
Summe, Produkt, Quotient 184
Die Kettenregel 185
Die Ableitung der Umkehrfunktion 188
Differenzierbarkeit von Potenzreihen 190
§ 5 Die Ableitung komplexer Funktionen 190
§ 6 Höhere Ableitungen 192
Aufgaben zum Einüben der Differentiationstechniken 193
§ 7 Beispiele von Differentialgleichungen und Lösungen 194
Lösung der Schwingungsgleichung durch Potenzreihenansatz 194
§ 8 Der erste Mittelwertsatz 196
Lokale Extrema 196
Der erste Mittelwertsatz der Differentialrechnung 198
Anwendungen des ersten Mittelwertsatzes 200
§ 9 Die Regeln von de L'Hôpital 201
Zusammenfassung 204

KAPITEL 12. INTEGRALRECHNUNG-INTEGRATIONSTECHNIK

Einleitung 207

§ 1 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 208

§ 2 Die Stammfunktion 210

§ 3 Eine andere Formulierung des Hauptsatzes 211

§ 4 Integration zur Lösung einfachster Differentialgleichungen 212

§ 5 Das unbestimmte Integral 214

§ 6 Die Integration komplexer Funktionen 215

§ 7 Integrationsmethoden 216
Integranden der Form $\frac{f'}{f}$ 216
Partielle Integration 217
Substitution 219
Eine Umformulierung der Substitutionsregel 222
Substitution bei bestimmten Integralen 224

§ 8 Separable Differentialgleichungen 225
Lösungsmethode 225
Merkregel 226
Anfangswertprobleme 227

§ 9 Integration rationaler Funktionen 228
1. Schritt: Polynomdivision 228
2. Schritt: Polynomzerlegung 229
3. Schritt: Partialbruchzerlegung 230
4. Schritt: Integration rationaler Funktionen 232
Kurze Merkregelsammlung 233

Zusammenfassung 234

KAPITEL 13. UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Einleitung 236

§ 1 Unbeschränktes Integrationsintervall 236
Integrationsintervall $]-\infty,\infty[$ 238
Konvergenzkriterien 239

§ 2 Unbeschränkter Integrand 240
Konvergenzkriterien 242

§ 3 Die Gammafunktion 243

§ 4 Die Laplace-Transformation 245
Linearität und elementare Laplace-Transformation 246
Bemerkungen zum Umkehrproblem 247
Transformation von Ableitungen 248
Tranformaiton von $f(at\pm b)$ 249
Verschiebung des Arguments in der Bildfunktion 250
Kurze Übersicht 251

Zusammenfassung 252

KAPITEL 14. TAYLORPOLYNOME UND TAYLORREIHEN

§ 1 Approximation durch Polynome 253
Approximation 253
Taylorpolynome 255

§ 2 Restglied 256
Restglied nach Taylor 256
Anwendung: Funktionswerte berechnen 257
Restglied nach Lagrange 258
Restglied abschätzen 258
Anwendung: Lokale Extrema 259

§ 3 Taylorreihen 261
Definition 261
Ein Gegenbeispiel 262
Konvergenz der Taylorreihe 263
Beispiel Logarithmus 265
Beispiel Arcus-Tangens 266
Beispiel Binomische Reihe 266

Zusammenfassung 267

Lösungen der Aufgaben 269

Sachverzeichnis 333

Vorwort

Dieses Buch entstand aus "Studienbriefen", die im Rahmen des Projektes "Fernstudium im Medienverbund" für Fernstudenten des Faches Elektrotechnik entwickelt wurden. Inhaltlich sollten durch diese Studienbriefe etwa 2 bis 3 Semester der normalen Mathematikausbildung von Studenten der Elektrotechnik an deutschen technischen Hochschulen und Universitäten abgedeckt werden; in ihrer Darstellungsform, ihrer didaktischen Gestaltung aber sollten die Studienbriefe auf Fernstudenten abgestellt sein - auf Studenten also, die mit Ausnahme weniger Präsenzphasen fern von jedem Hochschulort, ohne Besuch von Vorlesungen nur mittels solcher Texte studieren. Fernstudium in dieser Form ist weitgehend auch Selbststudium, deshalb sollte dieses Buch, dank seiner Entstehungsgeschichte, dem Prädikat "zum Selbststudium geeignet" genügen.

Mathematik lernt man nicht nur dadurch, daß man sich Definitionen und Sätze einprägt, Algorithmen oder gar Beweise auswendig lernt: Mathematik lernt man durch eigenes Tun. Wie es für einen Fahrschüler von entscheidender Bedeutung ist, neben dem Erlernen von Verkehrsregeln und technischen Daten eine gewisse Fahrpraxis zu gewinnen, so muß derjenige, der Mathematik erlernen will, Praxis im Umgang mit Mathematik erwerben. Diese Aussage gilt, unabhängig davon, ob man Mathematik um ihrer selbst willen oder als Hilfsmittel zur Lösung naturwissenschaftlicher, technischer oder ökonomischer Probleme erlernen will. Was "Praxis" allerdings bedeutet, ist abhängig von der Zielsetzung, und wir werden unsere Vorstellung von der Rolle der Mathematik als Grundlage für Physik und Technik kurz erläutern. Aber schon aus dem bisher gesagten folgt, daß ein Mathematiktext, der zum Selbststudium geeignet ist, das folgende Merkmal hat: Er regt den Leser immer wieder dazu an, einzelne Gedankenschritte selbst zu vollziehen, Gedanken weiterzuführen, Verbindungen herzustellen, Rechnungen nachzuvollziehen, die eigenen Kenntnisse zu überprüfen. Dazu ist unseres Erachtens weder der sogenannte "Definition-Satz-Beweis"-Stil noch ein Text im Sinne des "programmierten Lernens" geeignet. Ob es uns nun gelungen ist, dieser Forderung gerecht zu werden, muß der Leser beurteilen; alle Anregungen, die wir in dieser Hinsicht von Lesern der Studienbriefe - Kollegen verschiedener Fachrichtungen und Studenten - erhielten, versuchten wir zu berücksichtigen.

Doch nun zu der Frage, welche Rolle nach unserer Meinung die Mathematik in der Ausbildung von Physikern und Ingenieuren spielt und was praktischer Umgang mit dieser Mathematik für Studenten dieser Fachrichtungen bedeutet.
Die mathematische Ausbildung von Naturwissenschaftlern und Technikern unterscheidet sich von der Ausbildung von Mathematikern. Ein Mathematikstudent muß lernen, Mathematik zu schaffen, mathematische Fragestellungen herauszuarbeiten und Lösungstheorien zu entwickeln - der Ingenieur- oder Physikstudent muß lernen, die Mathematik für seine Wissenschaft nutzbar zu machen. Um bei dem Beispiel des Fahrschülers zu bleiben: Jemand, der ein Auto nutzen will, muß nicht lernen wie ein Auto entwickelt und konstruiert wird (umgekehrt ist es für den Konstrukteur allerdings schon vorteilhaft zu wissen, wozu sein Produkt später praktisch gebraucht wird - ein Aspekt, der in der modernen Ausbildung von Mathematikern oft zu kurz kommt). Er muß lernen, wie er es optimal nutzt, er muß Leistungsvermögen und Grenzen kennen.
Natürlich ist die Verflechtung von Mathematik und Physik oder Technik komplex und sicher muß insbesondere der Physikstudent im weiteren Verlauf seines Studiums auch lernen, die Mathematik seinen physikalischen Problemen entsprechend zu entwickeln und zu formen. Für die mathematischen Anfangsgründe einer wissenschaftlichen Ausbildung in diesen Fächern genügt aber der Benutzerstandpunkt völlig.
Das bedeutet nach unserer Meinung jedoch keineswegs, daß Mathematik als Sammlung von Rechenvorschriften, sogenannten Kochrezepten zu vermitteln ist.
Wir zitieren einen bekannten Vertreter der angelsächsischen angewandten Mathematik, Sir James Lighthill ("*Unterweisung im Entwerfen und im Gebrauch mathematischer Beschreibungen technischer Sy-*

steme" in W.H. Böhme (ed): Ingenieure für die Zukunft, TH Darmstadt 1980):

"Vorher möchte ich Sie jedoch daran erinnern, daß Mathematik, als ein Fach für sich, fast völlig auf Logik gründet. Es ist teilweise dieser einseitige Zugang, der reine Mathematik unbrauchbar macht als Background für Ingenieure. In Wirklichkeit wissen wir, daß Ingenieure ihre Entscheidungen vor dem Hintergrund einer Mischung aus logischer Analyse, experimentellen Daten und jener Art "Querdenken", das man oft als "Intuition des Ingenieurs" bezeichnet, treffen müssen. Angewandte Mathematik sucht ein Gleichgewicht herzustellen, das näher bei dem liegt, was der Ingenieur braucht, weil es auf der Idee beruht, daß Fortschritt erreicht werden muß, indem man Informationen aufgrund logischer Analyse mit Informationen integriert, die auf Experiment und Beobachtung basiert.
Ich betone jedoch, daß der grundsätzliche logische "Geschmack" der Mathematik auf jeden Fall erhalten bleiben muß, und ihr logischer Charakter muß in der Ingenieurausbildung nahegebracht werden. Auf alle, die zur Erkenntnis der logischen Elemente eines mathematischen Arguments gekommen sind, kann man sich verlassen, wenn es zum Beispiel darauf ankommt, eine Hypothese zu bewerten, nicht nur auf Grundlage experimenteller Beweise, sondern auch auf der Grundlage experimenteller Beweise unter Berücksichtigung der logischen Konsequenzen der Hypothese. Man kann sich darauf verlassen, daß sie bei ihren ersten Überlegungen auf die Grundprinzipien zurückgehen werden, anstatt sich in aufwendige Berechnungen auf der Basis oberflächlicher Grundlagen zu stürzen. Dementsprechend kann ich nicht mit jenen Extremisten übereinstimmen, die angewandte Mathematik als eine Sammlung empirischer Formeln lehren möchten! Ebenso unbrauchbar ist die strikte logische Entwicklung des Themas als eine Reihe von Theoremen und Beweisen. Wir brauchen einen Kurs der Mitte, bei dem wichtige Aspekte der logischen Natur mathematischer Analyse beibehalten werden, ohne den Studenten in einem Meer deduktiver Einzelheiten zu ertränken".

Wir haben versucht, einen solchen "Kurs der Mitte" zu steuern:

1) Um die Brücke zu den den Studenten primär interessierenden Wissenschaften zu schlagen, haben wir uns in Stoffauswahl und Reihenfolge so weit wie möglich an den Bedürfnissen dieser Wissenschaften orientiert und viele konkrete Beispiele aufgenommen. Natürlich sind diesem Vorhaben Schranken gesetzt: Einmal durch die Eigengesetzlichkeit des Aufbaus der Mathematik, zum anderen durch die relativ geringen Kenntnisse, die ein Studienanfänger auch in seinem eigenen Studienfach im allgemeinen hat. Um dies an Beispielen zu verdeutlichen: Man kann nicht gleich zu Beginn über Differentialgleichungen sprechen, wenn der Begriff der Differentiation vorher nicht klar ist; man kann einen Studenten kaum zur Beschäftigung mit Taylorreihen motivieren, indem man zeigt, daß die klassische Mechanik aus der speziellen Relativitätstheorie durch Abbruch einer Taylorreihe nach dem zweiten Glied entsteht, wenn dieser Student noch nie etwas von spezieller Relativitätstheorie gehört hat.
   Bei diesem Weg zwischen Theorie und Praxis hatten wir wertvolle Hilfe insbesondere von Kollegen der Elektrotechnik. Vor allem gilt hier unser Dank den Herren Professoren W. Heinlein, J. Stepina und W. Freise vom Fachbereich Elektrotechnik der Universität Kaiserslautern und Professor H.-G. Bausch und Diplom-Ingenieur U. Schneider von der TU Hannover.

2) Um den "logischen Geschmack der Mathematik" zu erhalten, haben wir versucht, den im modernen Sinn exakten Aufbau der Mathematik zu erhalten; Definitionen sollten logisch einwandfrei sein (wenn auch Funktionen noch "Zuordnungen", nicht "Teilmengen eines kartesischen Produktes" sein werden), Sätze sollten vollständig formuliert sein. Beweise allerdings werden dann weggelassen, wenn sie weder dem Verständnis des Satzes noch dem Einüben bestimmter Schlußweisen oder Begriffe dienen. Wir hoffen dadurch "das Meer deduktiver Einzelheiten" auf ein erträgliches, aber notwendiges Maß reduziert zu haben.
   Auch für diese Aufgabe konnten wir uns auf zahlreiche Hilfe stützen: Die Studienbriefe entstanden im Rahmen eines Teilprojektes zum Projekt "Fernstudium im Medienverbund der Mathematik" und gründen inhaltlich auf dem Basistext "Analysis" dieses Projektes. Den Mitarbeitern dieses Projekts, insbesondere dem Projektleiter Dr. J. Scheiba (Mainz) gebührt unser Dank ebenso wie den Mitgliedern der zugehörigen Fachkommissionen, insbesondere ihrem Vorsitzenden Prof. M. Barner (Universität Freiburg) und den Herren Professoren H. Heuser (Karlsruhe), C. Müller (Aachen) und W. Thimm (Kaiserslautern).
   Ganz herzlich danken wir auch Frau C. Kranz, Frau I. Schaumlöffel und Frau R. Stürmer, ohne deren Mühe und Geduld beim Schreiben der Texte dieses Buch sicher nicht zustandegekommen wäre.

Schließlich wollen wir noch einige allgemeine Gesichtspunkte zitieren, die sicherlich für einen beliebigen Lehrtext ihre Gültigkeit haben. Die Formulierung ist ziemlich genau 200 Jahre alt und stammt aus "Die Erziehung des Menschengeschlechts". Lessing hat natürlich an ein Buch ganz anderen Inhalts gedacht, trotzdem - wir könnten es gewiß nicht besser ausdrücken und bitten nur den Leser, die Bezeichnung "Kind", die Leserschaft, die Bezeichnung "kindliches Volk" zu verzeihen.

"Ein Elementarbuch für Kinder darf gar wohl dieses oder jenes wichtige Stück der Wissenschaft oder Kunst, die es vorträgt, mit Stillschweigen übergehen, von dem der Pädagog urteilte, daß es den Fähigkeiten der Kinder, für die er schrieb, noch nicht angemessen sei. Aber es darf schlechterdings nichts enthalten, was den Kindern den Weg zu den zurückbehaltnen wichtigen Stücken versperre oder verlege. Vielmehr müssen ihnen alle Zugänge zu denselben sorgfältig offen gelassen werden; und sie nur von einem einzigen dieser Zugänge ableiten oder verursachen, daß sie denselben später betreten, würde allein die Unvollständigkeit des Elementarbuchs zu einem wesentlichen Fehler desselben machen. ...

Eine Anspielung nenne ich, was bloß die Neugierde reizen und eine Frage veranlassen sollte. Einen Fingerzeig nenne ich, was schon irgendeinen Keim enthält, aus welchem sich die noch zurückgehaltne Wahrheit entwickeln läßt. In solchen Vorübungen, Anspielungen, Fingerzeigen besteht die positive Vollkommenheit eines Elementarbuchs; sowie die obenerwähnte Eigenschaft, daß es den Weg zu den noch zurückgehaltenen Wahrheiten nicht erschwere oder versperre, die negative Vollkommenheit desselben war.

Setzt man hierzu noch die Einkleidung und den Stil -
1) die Einkleidung der nicht wohl zu übergehenden abstrakten Wahrheiten in Allegorien und lehrreiche einzelne Fälle, die als wirklich geschehen erzählet werden.
2) den Stil - bald plan und einfältig, bald poetisch, durchaus voll Tautologieen, aber solchen, die den Scharfsinn üben, indem sie bald etwas anders zu sagen scheinen und doch das nämliche sagen, bald das nämliche zu sagen scheinen und im Grunde etwas anders bedeuten oder bedeuten können: Und ihr habt alle gute Eigenschaften eines Elementarbuchs sowohl für Kinder als für ein kindliches Volk.

Aber jenes Elementarbuch ist nur für ein gewisses Alter. Das ihm entwachsene Kind länger, als die Meinung gewesen, dabei zu verweilen, ist schädlich. Denn um dieses auf eine nur einigermaßen nützliche Art tun zu können, muß man mehr hineinlegen, als darin liegt, mehr hineintragen, als es fassen kann. Man muß der Anspielungen und Fingerzeige zu viel suchen und machen, die Allegorieen zu genau ausschütteln, die Beispiele zu umständlich deuten, die Worte zu stark pressen. Das gibt dem Kinde einen kleinlichen, schiefen, spitzfindigen Verstand; das macht es geheimnisreich, abergläubisch, voll Verachtung gegen alles Faßliche und Leichte.
Ein beßrer Pädagog muß kommen und dem Kinde das erschöpfte Elementarbuch aus den Händen reißen.

Kaiserslautern im September 1980

Die Autoren

Die Gedichte auf den Seiten 132, 145 und 172 sind aus der Sammlung "Carmina Mathematica" von Hubert Cremer (5.Auflage, 1977). Wir danken dem Verlag I.A.Mayer, Aachen für die freundliche Genehmigung zum Abdruck.

Die Abbildung auf dem Broschurumschlag zeigt die Messung des Inhalts von Fässern und wurde dem Titelblatt des 1531 in Nürnberg gedruckten Visierbüchleins von Johann Frey entnommen. Die Formel zur Berechnung des Rauminhalts ist die Keplersche (Faß-)Regel (siehe Seite 111).

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

insbesondere beim Selbststudium zu beachten

Während Ihres Studiums der Mathematik sollten Sie eine möglichst große Sicherheit im Umgang mit mathematischen Methoden und Ergebnissen erlangen. Um dieses Ziel auch schon für den in diesem Buch vorliegenden Stoff zu erreichen, finden Sie im Text viele Aufgaben. Diese sind in der Randspalte durch ein A gekennzeichnet. Halten Sie also beim Lesen und Lernen stets Bleistift und Papier bereit! Die Aufgaben sind mit dem (bis zu der jeweiligen Aufgabe) gebrachten Stoff zu lösen.

Am Ende des Buches (ab Seite 269) finden Sie die "Lösungen der Aufgaben". Diese Lösungen gliedern sich für die meisten Aufgaben in "1) Hinweise" und "2) Lösung". Sollte Ihnen bei einer Aufgabe nach einigen Anläufen eine eigene Lösung nicht gelingen, so sollten Sie zunächst die "Hinweise" lesen und dann neue Lösungsversuche unternehmen. Wenn Ihnen auch die "Hinweise" nicht weiterhelfen, (was durchaus mehrfach vorkommen kann), so ziehen Sie die komplette Lösung zu Rate und vergleichen diese mit Ihren zuvor angestellten Überlegungen. Sehen Sie sich jedoch die Lösung auch dann an, wenn Ihnen die Bearbeitung der Aufgabe gelingt. Zum einen erkennen Sie vielleicht, welchen anderen (eventuell kürzeren) Lösungsweg es noch gibt; zum anderen schleichen sich beim Erlernen der Mathematik sehr leicht Denkfehler ein, die Sie beim Überprüfen entdecken können.

Sie werden bald merken, daß das bloße Durchlesen des Lehrtextes noch kein Verstehen oder Lernen des Stoffes ausmacht. Sie sollten deshalb Ihnen schwer verständliche Passagen noch einmal selbständig (eventuell ausführlicher) Schritt für Schritt aufschreiben. Unterstreichen von Textstellen ist <u>kein</u> Ersatz für dieses Nachvollziehen. Manchmal ist es auch hilfreich, sich an einer schwierigen Stelle nicht festzubeißen, sondern erst einmal weiterzulesen. Nachdem Sie dann ein Beispiel nachvollzogen, eine Aufgabe selbst gerechnet oder weitere Informationen gelesen haben, nehmen Sie sich diese Stelle noch einmal vor. Und siehe da ...
Solche Aha-Erlebnisse lassen gelegentlich auch etwas länger auf sich warten.

Wenn Sie beim Lesen auf Begriffe oder Ergebnisse stoßen, die Ihnen nicht ganz klar sind, sollten Sie sofort nachschlagen. Bei dieser Suche helfen Ihnen die im Text stehenden Zitate (z.B. bedeutet (4.22) ein Ergebnis aus Kapitel 4), das Sachverzeichnis ab Seite 333 und die Marginalien in den Randspalten.
Kursiv gedruckte Textpassagen enthalten keinen Lehrtext sondern geben Ihnen Erläuterungen, Hinweise oder Beschreibungen.
Klein gedruckte Textpassagen können Sie beim ersten Lesen überschlagen.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!