Uni-Taschenbücher 786

UTB

Eine Arbeitsgemeinschaft der Verlage

Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart
Wilhelm Fink Verlag München
Gustav Fischer Verlag Stuttgart
Francke Verlag München
Paul Haupt Verlag Bern und Stuttgart
Dr. Alfred Hüthig Verlag Heidelberg
Leske Verlag + Budrich GmbH Opladen
J. C. B. Mohr (Paul Siebeck) Tübingen
C. F. Müller Juristischer Verlag - R. v. Decker's Verlag Heidelberg
Quelle & Meyer Heidelberg
Ernst Reinhardt Verlag München und Basel
F. K. Schattauer Verlag Stuttgart-New York
Ferdinand Schöningh Verlag Paderborn
Dr. Dietrich Steinkopff Verlag Darmstadt
Eugen Ulmer Verlag Stuttgart
Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen und Zürich
Verlag Dokumentation München

Grundkurs Physik · Band 1/I
Herausgeber: *H.-J. Seifert* · *M. Trümper*

Prof. Dr. *Hans-Jürgen Seifert* ist Dozent an der Hochschule der Bundeswehr Hamburg (Fachbereich Maschinenbau, Institut für Angewandte Mathematik).
Prof. Dr. *Manfred Trümper* ist z. Z. im Rahmen der Entwicklungshilfe Dozent an der Universität Oran (Algerien) im Fachbereich Physik.

Hans-Jürgen Seifert

Mathematische Methoden in der Physik

Teil 1:

Denk- und Sprechweisen · Zahlen
Lineare Algebra und Geometrie
Differentialrechnung I

Mit 46 Abbildungen

Dr. Dietrich Steinkopff Verlag · Darmstadt

Der 1942 in Berlin geborene Autor studierte Physik an der TU Berlin (1961 bis 1964) und der Universität Hamburg (1964 bis 1968). Er arbeitete dort in dem Forschungsseminar für Relativitätstheorie bei *P. Jordan* und *W. Kundt* (Diplom 1967, Promotion 1969) und ist seit 1973 Professor für Mathematik am Fachbereich Maschinenbau der Hochschule der Bundeswehr Hamburg. Wichtigstes Forschungsgebiet: Mathematische Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie (Differentialgeometrie, Hyperbolische Differentialgleichungen).

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Seifert, Hans-Jürgen:

Mathematische Methoden in der Physik/Hans-Jürgen Seifert. – Darmstadt: Steinkopff.

Teil 1. Denk- und Sprechweisen; Zahlen; Lineare Algebra und Geometrie; Differentialrechnung. – 1978. – XII, 180 S.
(Uni-Taschenbücher; 786: Grundkurs Physik; 1)

ISBN-13: 978-3-7985-0507-0 e-ISBN-13: 978-3-642-95964-6
DOI: 10.1007/ 978-3-642-95964-6

Vorwort der Herausgeber zum Sammelwerk „Grundkurs Physik“

Der „Grundkurs Physik“ besteht aus einzeln erhältlichen Bänden, die aufeinander abgestimmt, aber unabhängig voneinander lesbar sind. Vorgesehen sind zunächst:

1. Mathematische Methoden, 2 Teilbände
2. Mechanik
3. Wärmelehre
4. Elektromagnetismus, Optik, Relativität, voraussichtlich 2 Teilbände
5. Mechanik der Kontinua
6. Quantenphysik
7. Statistische Physik
8. Physik als Wissenschaft (Bemerkungen zur Stellung der Physik zu anderen Wissenschaften; Methoden, Grenzen, Konsequenzen der Physik).

Alle diese Bände sind als Einführung in das betreffende Gebiet bestimmt. Daher steht eine ausführliche Motivierung und Erläuterung der wesentlichen Konzepte im Vordergrund, nicht so sehr der Ausbau des Formalismus. Es wird nicht nur die Physik – ihre Theorien und Ergebnisse – dargestellt, sondern auch *über* die Physik – ihre Denkweise, ihre Methoden, ihre Bedeutung – gesprochen.

Das Lehrwerk ist geschrieben für Studenten naturwissenschaftlich orientierter Fachrichtungen. Es geht nicht von der Fiktion aus, die einzige Wissensquelle des Studenten zu sein, sondern empfiehlt sich zum Gebrauch neben Vorlesungen und vor weiterführenden Texten.

Die eigentlichen „Physikbände“ der Reihe (Bd. 2 bis Bd. 7) enthalten viele Übungsbeispiele, Zusammenfassungen von Kapiteln, Aufgaben (mit Lösungen). Die Beispiele sollen auch für „Anfänger“ verständlich und anregend sein; das soll nicht durch zu große Simplizität, sondern durch Bezug auf den „technischen Alltag“ erreicht werden. (Dieser wird heute leider von den meisten Lehrgängen der Physik vernachlässigt, denn die klassische Physik hat man den Ingenieuren zur Anwendung überlassen, aktuelle physikalische Forschung basiert meist auf der Quantentheorie.)

In den beiden „einrahmenden“ Bänden (Bd. 1 und Bd. 8) geht es um zwei Gebiete, die nicht zur Physik gehören, aber für die Beschäftigung mit der Physik äußerst wichtig sind. Noch weniger als in den anderen Bänden ist hier eine umfassende Behandlung angestrebt, es soll eine Brücke geschlagen werden zu den üblichen Darstellungen dieser Gebiete, die in Stil und Denkweisen weit von denen der Physiker entfernt sind, auch wenn sie oft das Wort „Physik" benutzen.

Der Anstoß für den Grundkurs Physik wurde vom Verleger, Herrn *Jürgen Steinkopff*, gegeben. Die Herausgeber danken ihm für seinen Optimismus, seine Geduld und viele nützliche Anregungen zu Planung und Ausführung der Reihe.

Hans-Jürgen Seifert *Manfred Trümper*

Vorwort

Inhalt und Aufbau

Dieses Buch erscheint als »mathematischer Vorspann« zu einer Reihe „Grundkurs Physik" für *Studenten der Naturwissenschaften bis zum Vordiplom.*

Ausgehend davon, daß

- für den Physikunterricht (zumindest bis zum Vordiplom) viele Ergebnisse des systematischen, nach innermathematischen Gesichtspunkten aufgebauten Mathematikkursus zu spät kommen,
- die Tendenz im Mathematikkurs herrscht, sich auf den Aufbau des Formalismus zu beschränken und sich damit von den Anwendungen zu entfernen, die seinerzeit den Anlaß gaben, jenen Formalismus erst zu schaffen, und entsprechend die übliche Darstellung der klassischen Physik erstarrt und von den Fortschritten der Mathematik bei der Klärung schon lange benutzter Grundbegriffe unbeeinflußt bleibt,
- im üblichen Mathematikunterricht die wichtigsten Begriffe als Ergebnis sehr umfangreicher und von Anfängern meist nicht recht durchschaubaren Hilfskonstruktionen erscheinen, deren Methoden

völlig vergessen werden, wenn man die gewünschten Begriffe erst einmal erhalten*) hat,

versucht dieses Buch, hierbei einige Lücken zu schließen (wirklich nur *einige*). Es besteht aus vier auch *einzeln lesbaren Strängen* S 1, 2, 3, 4:

Strang S 1: Für die elementare klassische Physik; zur Formulierung ihrer Grundprobleme und das Durchrechnen einfacherer Beispiele ein *Grundkurs in klassischer Analysis.*

- Zum Begriff der Funktion (Kap. 1.3.5)
- Komplexe Zahlen (2.3)
- Elementare Funktionen (4.1; 4.3 ohne 4.3.4)
- Integration reeller Funktionen (5.2)
- gewöhnliche Differentialgleichungen (6)
- Zur Problemstellung beim Lösen partieller Differentialgleichungen (8)

(Notwendige Vorkenntnisse für S 1 sind: Rechnen mit reellen Zahlen, insbesondere Potenzen und Ungleichungen, elementare Geometrie und anschauliche Vektorrechnung, die aus der Schule bekannt sind und auch in Strang 3, Kap. 2.1, 2.2, 3.2 behandelt werden). Gebracht werden Rechenregeln, viele konkrete Beispiele, wenige Beweise, kein Versuch zu größtmöglichen Verallgemeinerungen.

Strang S 2: Für die klassische Feldtheorie; zum Verständnis der Struktur ihrer Grundgesetze: *Tensorrechnung und mehrfache Integrale*

- Lineare Algebra (Vektoren, Tensoren, Determinanten) (Kap. 3.1/2/3)
- Vektoranalysis (4.4)
- Mehrfache Integrale und Integralsätze (5.1/3)

Systematische Darstellung des Formalismus, Begründungen, weshalb die betrachteten Operationen geometrische Bedeutung haben und weshalb sie in einem gewissen Sinne alle Möglichkeiten geometrisch-analytischer Operationen erschöpfen. In Kap. 4.4 und 5 Beschränkung auf den 2- bzw. 3-dimensionalen Raum. Wenig Beispiele.

---

*) Z. B. werden in der Schule meist für die reellen Zahlen Intervallschachtelungen (oder Cauchy-Folgen), für die Ableitungen von Funktionen Folgen von Differenzenquotienten und für beides eine aufwendige Theorie von Grenzwerten eingeführt, obwohl später beim Rechnen mit Zahlen und bei Funktionsdiskussionen der Schüler mit Regeln auskommt, in denen keine solche Folgen mehr vorkommen und die ihre Herkunft aus Grenzwertbetrachtungen nicht mehr erkennen lassen. Durch ein *Studium der Physik* kann man sich aber nicht mehr mit unverstandenen mathematischen Rezepten »durchwursteln«.

Strang S 3: Zur Vorbereitung auf die Denkweise der nachklassischen Physik (Quantentheorie): *Lineare Funktionenräume.*

- System der Strukturen auf der Menge der reellen Zahlen (Kap. 2.1/2)
- Stetige Funktionen (2.2.5)
- Normierte lineare Räume (Banach-/Hilberträume) (3.4)
- Differentiation auf Banachräumen (4.2) als lineare Näherung
- Potenzreihen und analytische Funktionen (4.4.2; 5.1/4)
- Funktionenräume: Zum Begriff der Distribution, Fourieranalysis (7)

Hier soll die Tragweite einfacher mathematischer Strukturen, „Linearität", „Linearisierung" und ihre Anschaulichkeit in geometrischer Redeweise sichtbar gemacht werden. In den vorderen Teilen viele Beweise; nur Grundtatsachen, wenig Details.

Strang S 4: Zur wissenschaftlichen Methode der Physik: Anhand einer stark idealisierenden Darstellung der Struktur physikalischer Theorien wird in den einleitenden Paragraphen der Kapitel zu erläutern versucht, warum die betreffenden mathematischen Gebiete in der Physik eine Rolle spielen (Kap. 1; Kap. 2.0; 3.0; 4.0; 5.1.0; 6.0).

Nach diesem Überblick über den Inhalt ein Hinweis auf einiges, das an „Stoff" *fehlt:*

- Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
- Gruppentheorie und Differentialgeometrie
- Variationsrechnung und Ausbau der partiellen Differentialgleichungen

und an „Tiefe":

- Praktische Rechenverfahren (Numerik)
- die für die Analysis grundlegende topologische Struktur („Grenzwert") wird nur ansatzweise behandelt; nicht vorgeführt wird die »Zoologie« der verschiedenen Stetigkeiten und Konvergenzen.
- die Schematisierung des Begriffs der strukturerhaltenen Abbildungen (Homöo-, Iso-, Homo- und andere Morphismen), die in natürlicher Weise zu „Automorphismengruppen" und „Kategorien" führt und erst das mathematische Strukturkonzept zur vollen Wirksamkeit bringt.

(All dieses sollten Physiker in einem »zweiten Durchgang« durch die Mathematik erarbeiten, da sie dies erst dann, durch Anwendungen motiviert, wirklich würdigen können).

Stil

Dieses Buch ist *kein in sich abgeschlossenes Lehrbuch;* eines seiner Ziele ist es, den Leser zu anderer Lektüre*) anzuregen; dazu dient eine Reihe von „Hinweisen“ auf mathematische Entwicklungen jeweils im Anschluß an in diesem Buch behandelte Ergebnisse.

Es sollten möglichst *kleine Abschnitte für sich allein verständlich* sein, damit ein Lesen neben Physikbüchern möglich wird. Dazu dienen auch mehrere Register. Dieses Prinzip geht auf Kosten der Ökonomie (einiges wird mehrfach gebracht) und der Eleganz (von den sehr leistungsfähigen allgemeinen Begriffen aus Kap. 3/4 wird etwa im Kap. 6 kein Gebrauch gemacht). Einige mathematisch problematische, physikalisch aber äußerst zweckmäßige Bezeichnungsweisen (etwa: „Terme höherer Ordnung“, „Größen“ statt „Funktionen“) werden, besonders in den Beispielen, benutzt, allerdings unter Hinweis auf ihre »Gefahren« und nicht – wie meist in Mathematikbüchern – schamhaft verschwiegen.

Entgegen einem oft erweckten Eindruck gibt es keine allgemein akzeptierte und praktizierte Norm für »mathematische Strenge« in Lehrbüchern. Die Richtigkeit eines Satzes läßt sich nur durch eine lückenlose Kette von Beweisen aus den Grundgesetzen her begründen, was hier nicht angestrebt wird. Gründe, weshalb dennoch eine Reihe von Beweisen aufgenommen wurde, werden in Kap. 1.2.2 genannt. In diesem Buch bezeichnet „**Beweis:**“ eine Sammlung von Argumenten, die Studenten einer Naturwissenschaft zu einer logisch vollständigen Rückführung des jeweiligen Satzes auf vorher in diesem Buch aufgeführte Sätze ergänzen können sollten; „Zum **Beweis:**“ ist eine Angabe von verschiedenen Beweisideen, deren Ausbau zu einem Beweis aber manchmal Fakten voraussetzt, die plausibel aber nicht leicht beweisbar sind.

Um die große Stoffülle auf engem Raum zu bewältigen und das wiederholte Lesen nicht langweilig zu machen, wird dem Leser einiges »stillschweigend« zur Ergänzung überlassen; z. B. sind in Kap. 4.2.9 in Definitionen und Sätzen zunächst nur Maxima eingeführt, und plötzlich wird auch von Minima geredet. Es wird vom Leser der Mut erwartet, die Regeln für Maxima auch ohne ausdrückliche Aufforderung sinngemäß auf Minima zu übertragen.

---

*) Zu einem Selbststudium ist es sicher nicht geeignet; ich habe dieses Buch vielmehr so geschrieben, wie ich es mir während meines Studiums *zusätzlich* zu vorhandenen Vorlesungen und Büchern gewünscht hätte.

Zur Hervorhebung einzelner Worte wird *Kursivschrift* verwendet. In Häkchen (»···«) erscheinen Worte, bei denen deutlich gemacht werden soll, daß sie nicht als mathematische Fachausdrücke dienen, sondern die mathematischen Sachverhalte umgangssprachlich kommentieren. Mathematische Fachausdrücke stehen bei ihrem ersten Gebrauch in Gänsefüßchen („ ··· ") und werden im allgemeinen kurz danach durch Definitionen in ihrem Gebrauch präzise festgelegt. Wird über Worte oder Aussagen gesprochen, werden diese in Gänsefüßchen gesetzt (man vergleiche: Die Kraft ist ein *Vektor*, „*Vektor*" kommt aus dem Lateinischen.)

Zum Schluß noch ein für Studienanfänger nicht überflüssiger Hinweis: In diesem Buch sind mit Gewißheit *Druckfehler* und *sachliche Fehler* (das haben insbesondere erste Auflagen so an sich) und – noch schlimmer – *mißverständliche Passagen* und *persönliche Ansichten* des Autors. Auch diese Möglichkeiten sind in Betracht zu ziehen, wenn der Leser mit dem Verständnis einer Stelle Schwierigkeiten hat.

Entsprechend der Aufgabe als mathematischer Vorspann zu einer Physikbuchreihe werden keine *Übungsaufgaben* gestellt.

Angesichts der großen und ständig wachsenden Zahl von einführenden Mathematikbüchern habe ich schweren Herzens auf ein *Literaturverzeichnis* verzichtet.

Die Abschnitte des Buches sind dezimal gekennzeichnet. Innerhalb der Abschnitte werden fortlaufend die Absätze, Sätze und Formeln durchnumeriert. Bei Verweisen innerhalb eines Abschnittes wird nur diese Nummer, bei Verweise auf andere Abschnitte wird die Nummer an die Abschnittsnummer angefügt; z. B. bezeichnet „Formel 3.2.3.5" die hinter der Marke „**5.**" in Kap. 3.2.3 stehende Formel; „Satz 4" den in demselben Abschnitt stehenden Satz hinter der Marke „**4.**".

Mein Dank gilt den Kollegen, die mit vielen guten Anregungen und sachlicher Kritik dem Leser Schlimmeres erspart haben; insbesondere den Herren *H. Friedrich, F. Grenacher, H. Müller zum Hagen* und *J. Zeuge;* und mein Dank gilt Frau *I. Czechatz*, die, obwohl nicht dazu verpflichtet, den Inhalt zu verstehen, das Manuskript bewundernswürdig schnell, sinnvoll und sorgfältig geschrieben hat. Ohne all diese Hilfe hätte ich das Buch nicht so schreiben können.

Hamburg, Sommer 1978 *Hans-Jürgen Seifert*

Inhalt

Inhalt des zweiten Teilbandes