

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL · E. HOPF · H. HOPF · W. MAGNUS
F. K. SCHMIDT · B. L. VAN DER WAERDEN

BAND LXXXI

EINFÜHRUNG IN DIE
TRANSZENDENTEN ZAHLEN

VON

THEODOR SCHNEIDER



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GOTTINGEN · HEIDELBERG
1957

EINFÜHRUNG IN DIE TRANSZENDENTEN ZAHLEN

VON

DR. THEODOR SCHNEIDER

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT
ERLANGEN



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GOTTINGEN · HEIDELBERG
1957

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN

OHNE AUSDRÜCKLICHE GENEHMIGUNG DES VERLAGES IST ES AUCH NICHT
GESTATTET, DIESES BUCH ODER TEILE DARAUS AUF PHOTOMECHANISCHEM
WEGE (PHOTOKOPIE, MIKROKOPIE) ZU VERVIELFÄLTIGEN

© BY SPRINGER-VERLAG OHG.
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG 1957

ISBN-13: 978-3-642-94695-0

e-ISBN-13: 978-3-642-94694-3

DOI: 10.1007/978-3-642-94694-3

BRÜHLSCHER UNIVERSITÄTSDRUCKEREI GIESSEN

Vorwort

Über transzendente Zahlen gibt es nur sehr wenige zusammenfassende Darstellungen. Ein Grund dafür dürfte darin zu suchen sein, daß in der Originalliteratur über transzendente Zahlen nur vereinzelt allgemeinere Methoden entwickelt worden sind und zumeist die Transzendenzergebnisse durch recht spezielle, eigens auf die jeweilige Aufgabe zugeschnittene Gedanken bewiesen wurden. Erst seit einiger Zeit wurden in zunehmendem Maße umfassendere Beweisprinzipien deutlich.

Gerade auf die Herausarbeitung von allgemeineren Beweismethoden habe ich in dieser Schrift besonderen Wert gelegt und dabei sogar in Kauf genommen, daß einige Resultate durchaus nicht mit dem kürzestmöglichen, dafür aber einem verallgemeinerungsfähigen Beweis bestätigt werden. Aus solchen methodischen Gesichtspunkten heraus glaubte ich auch, mich auf die meines Erachtens wichtigsten Teile der Theorie der transzendenten Zahlen beschränken zu sollen, und konnte dabei manche geistvolle Einzeluntersuchung nicht berücksichtigen.

Ich habe mich bemüht, eine Einführung in das leider so wenig bekannte Gebiet der transzendenten Zahlen zu geben, bei der nur einige Grundkenntnisse aus der Theorie der algebraischen Zahlen und aus der Funktionentheorie vorausgesetzt werden. Die einzelnen Kapitel sind unabhängig voneinander lesbar, insbesondere stehen Kapitel I und III für sich, wenn auch teilweise auf Hilfssätze aus vorhergehenden Kapiteln zurückgegriffen wird. Im Literaturverzeichnis ist nur diejenige Literatur aufgeführt, auf die bereits im Text verwiesen ist.

Für wertvolle Hilfe bei der Durchsicht des Manuskripts und der Korrekturen bin ich Herrn Dr. LEOPOLDT zu Dank verpflichtet. Dem Herausgeber und dem Verlag schulde ich Dank für das Verständnis und die überaus große Geduld, die sie mir entgegengebracht haben.

Erlangen, im März 1957.

THEODOR SCHNEIDER.

Inhaltsverzeichnis

I. Kapitel. Konstruktion transzendenter Zahlen

§ 1. Der LIOUVILLESche Approximationsatz	1
§ 2. LIOUVILLESche transzendente Zahlen	2
§ 3. Verallgemeinerung des LIOUVILLESchen Satzes	4
§ 4. Eine Anwendung des verallgemeinerten LIOUVILLESchen Satzes	9
§ 5. Schärfere Approximationsätze. Der Satz von THUE-SIEGEL-ROTH	11
§ 6. Weitere Anwendungen auf transzendente Zahlen	34

II. Kapitel. Transzendente Zahlen als Werte von periodischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen

§ 1. Irrationalität von π	40
§ 2. Transzendenz der Werte der Exponentialfunktion und des Logarithmus	43
§ 3. Arithmetische Bedingungen für algebraische Abhängigkeit von Funktionen	47
§ 4. Transzendenzresultate, die mit der Exponentialfunktion, den elliptischen Funktionen und der Modulfunktion zusammenhängen	57

III. Kapitel. Eine Klasseneinteilung der Zahlen nach MAHLER

§ 1. Einführung der MAHLERSchen Klassifikation	64
§ 2. Eigenschaften der MAHLERSchen Klasseneinteilung	68
§ 3. Die Klassifikation von KOKSMA und ihr Zusammenhang mit der MAHLERSchen Einteilung	72
§ 4. Eine maßtheoretische Frage	82

IV. Kapitel. Das Transzendenzmaß

§ 1. Ein Transzendenzmaß für e	86
§ 2. Eine GELFONDSche Methode zur Annäherung von α^β durch algebraische Zahlen	94
§ 3. Eine verallgemeinerte Fragestellung und weitere Resultate.	102

V. Kapitel. Algebraische Unabhängigkeit transzendenter Zahlen

(Die SIEGELSche Methode)

§ 1. Arithmetische Hilfsbetrachtungen	111
§ 2. Der LINDEMANNsche Satz	119
§ 3. Algebraische Beziehungen zwischen BESSELSchen Funktionen und ihren ersten Ableitungen	125
§ 4. Der SIEGELSche Satz über die Werte von BESSELSchen Funktionen und weitere Resultate.	132
Einige offene Fragestellungen	137
Anhang	139
Literaturverzeichnis	143
Namenverzeichnis.	148
Sachverzeichnis	149