

Differentialoperatoren

Differentialoperatoren

der mathematischen Physik

Eine Einführung

Von

Dr. rer. nat. Günter Hellwig
o. Professor an der Technischen Universität Berlin

Springer-Verlag

Berlin/Göttingen/Heidelberg

1964

ISBN-13:978-3-642-92885-7 e-ISBN-13:978-3-642-92884-0
DOI: 10.1007/978-3-642-92884-0

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet,
dieses Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege
(Photokopie, Mikrokopie) oder auf andere Art zu vervielfältigen
© by Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1964
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1964
Library of Congress Catalog Card Number 64 – 16795

Franz Rellich

in memoriam

Vorwort

Dieses Buch will eine Einführung in das Gebiet der Differentialoperatoren sein. Es sollte für Studierende der Mathematik und Physik in den mittleren Semestern bequem lesbar sein. Deshalb wurde eine Einführung in den HILBERTSchen Raum und seine Operatoren aufgenommen.

Die Differentialoperatoren der Physik sind meistens partielle Differentialoperatoren. Unter diesen besteht das Interesse heute vornehmlich an solchen partiellen Differentialoperatoren, deren unabhängige Variablen x_1, \dots, x_n im gesamten \mathfrak{R}_n variieren, weil die SCHRÖDINGER-Operatoren der Quantenmechanik diese Eigenschaft besitzen. Deshalb sind solche Operatoren gegenüber den klassischen Operatoren stets bevorzugt behandelt worden.

Im Kapitel I wird eine Einführung in den HILBERTSchen Raum § gegeben. Kapitel II beschäftigt sich mit den Operatoren in §, wobei als Beispiele für Symmetrie und Halbbeschränktheit nach unten solche partiellen Differentialoperatoren und vornehmlich SCHRÖDINGER-Operatoren herangezogen werden.

Das III. Kapitel bringt die Spektraltheorie vollstetiger Operatoren, die für die klassischen Differentialoperatoren ausreichend ist. Im IV. Kapitel wird die Spektraltheorie von SCHRÖDINGER-Operatoren entwickelt, wozu die Spektraltheorie von selbstadjungierten Operatoren in § unerlässlich ist. Der zentrale Spektralsatz für solche selbstadjungierten Operatoren wird mit Erläuterungen bereitgestellt, nicht dagegen bewiesen. Solche Beweise sind heute in den meisten Lehrbüchern des HILBERTSchen Raumes bequem zugänglich.

Das Kapitel V bringt die Spektraltheorie des WEYLSchen Differentialoperators. Da es sich um einen gewöhnlichen Differentialoperator handelt, hat unsere Darstellung nur skizzenhaften Charakter. Dies konnte um so mehr geschehen, weil in den letzten Jahren zahlreiche ausgezeichnete Lehrbücher über diesen Gegenstand erschienen sind. Dagegen wird die Frage nach den zu stellenden Randbedingungen ausführlicher erörtert, weil die unmittelbar durch die Theorie gelieferten Randbedingungen für die Anwendungen wegen ihres komplizierten Charakters nicht eigentlich brauchbar sind. K. O. FRIEDRICHS und später F. RELICH haben unter zusätzlichen Voraussetzungen bequem verwendbare Randbedingungen angegeben, die jedoch keinen Eingang in die Lehrbuchliteratur gefunden haben. Durch Bereitstellen von Beispielen wird gehofft, das Interesse für diese wichtige Frage zu beleben, die sich eigentlich schon bei sehr einfachen Differentialoperatoren (wie z. B. beim BESSELSchen) stellt.

Die Frage nach der expliziten Berechnung des Spektrums eines Differentialoperators wird hier nicht behandelt, weil eine solche Berech-

nung im allgemeinen nur dann gelingt, wenn die Eigenwertgleichung des partiellen Differentialoperators durch Separation der Variablen auf solche für gewöhnliche Differentialgleichungen führt und für diese dann genügend Kenntnisse aus dem Gebiet der speziellen Funktionen vorhanden sind. Eine ausgezeichnete Behandlung dieses Problemkreises findet man in den Büchern von E. C. TITCHMARSH, wozu wesentlich mehr Hilfsmittel über gewöhnliche Differentialoperatoren (insbesondere die TITCHMARSHSchen Formeln für die Spektralfunktionen) nötig sind, als in dieser Einführung bereitgestellt werden konnten.

Es bedarf kaum eines Hinweises, daß keinerlei Kenntnisse der Quantenmechanik vom Leser benötigt werden. Die gelegentlichen Hinweise darauf können ohne weiteres übergangen werden.

Das Literaturverzeichnis ist bewußt knapp gehalten, da ein Lehrbuch, welches im Umfange sehr beschränkt ist, nicht in der Lage ist, einen Literaturüberblick über diesen Gegenstand zu geben. Einen ausgezeichneten Überblick vermitteln die Bücher von DUNFORD und SCHWARTZ. Wir kommen auf diese und die anderen in der Einleitung nicht explizit genannten Werke im Text zurück.

Zu danken habe ich meiner Frau und Mitarbeiterin *fil. kand.* BIRGITTA HELLWIG für ihre Hilfe von der Planung bis zur Fertigstellung, die wesentlich dazu beigetragen hat, manches besser und einfacher zu gestalten. Desgleichen danke ich Herrn Dr. H.-W. RÖHDE für seine gewissenhafte Hilfe bei den Korrekturen und dem Springer-Verlag für eine ausgezeichnete Zusammenarbeit.

Berlin, im April 1964

G. Hellwig

Inhaltsverzeichnis

I. Der Hilbertsche Raum

| | |
|---|----|
| 1. Der lineare, metrische und BANACHSche Raum | 1 |
| 1.1 Der lineare Raum | 1 |
| 1.2 Der metrische Raum | 2 |
| 1.3 Vollständiger metrischer Raum | 4 |
| 1.4 Der BANACHSche Raum | 8 |
| 2. Der HILBERTSche Raum \mathfrak{H} | 11 |
| 2.1 Definition des HILBERTSchen Raumes | 11 |
| 2.2 Vollständiger HILBERTScher Raum | 13 |
| 2.3 Separabler HILBERTScher Raum | 18 |
| 2.4 Dichte Teilräume | 19 |
| 3. Orthonormalsysteme in \mathfrak{H} | 23 |
| 3.1 Definition und BESSELSche Ungleichung | 23 |
| 3.2 Vollständige Orthonormalsysteme | 25 |
| 3.3 Das E. SCHMIDTSche Orthogonalisierungsverfahren | 30 |

II. Lineare Operatoren in \mathfrak{H}

| | |
|---|----|
| 1. Eigenwert und reziproker Operator | 31 |
| 1.1 Definitionen und Problemstellungen | 31 |
| 1.2 Der STURM-LIOUVILLESche Operator im \mathfrak{R}_1 | 34 |
| 1.3 Hilfsmittel aus den partiellen Differentialgleichungen | 44 |
| 1.4 Der STURM-LIOUVILLESché Operator im \mathfrak{R}_n | 50 |
| 2. Symmetrische und halbbeschränkte Operatoren | 53 |
| 2.1 Definitionen | 53 |
| 2.2 Symmetrie und Halbbeschränktheit des STURM-LIOUVILLESchen Operators im \mathfrak{R}_1 | 55 |
| 2.3 Symmetrie und Halbbeschränktheit des STURM-LIOUVILLESchen Operators im \mathfrak{R}_n | 59 |
| 2.4 Ein nicht-halbbeschränkter STURM-LIOUVILLEScher Operator im \mathfrak{R}_2 | 65 |
| 3. SCHRÖDINGER-Operatoren | 68 |
| 3.1 Einige Prinzipien der Quantenmechanik | 68 |
| 3.2 Energie-Operatoren | 72 |
| 3.3 Symmetrie von SCHRÖDINGER-Operatoren | 74 |
| 3.4 Halbbeschränktheit von SCHRÖDINGER-Operatoren | 86 |

III. Spektraltheorie vollstetiger Operatoren

| | |
|---|-----|
| 1. Vollstetige und beschränkte Operatoren | 91 |
| 1.1 Definitionen | 91 |
| 1.2 Der Entwicklungssatz für vollstetige, symmetrische Operatoren | 96 |
| 1.3 Verschärfter Entwicklungssatz | 101 |
| 1.4 Die Vollstetigkeit von Integraloperatoren | 102 |
| 1.5 Die Vollstetigkeit von Integraloperatoren (Fortsetzung) | 109 |
| 1.6 Das allgemeine STURM-LIOUVILLESche Eigenwertproblem im \mathfrak{H}_1 | 111 |
| 1.7 Das STURM-LIOUVILLESche Eigenwertproblem im \mathfrak{H}_n | 113 |
| 2. Anfangs-Randwertprobleme | 115 |
| 2.1 Das Anfangs-Randwertproblem für $Au + \dot{u} = f$ | 115 |
| 2.2 Das Anfangs-Randwertproblem für $Au + \ddot{u} = f$ | 117 |
| 2.3 GREENSche Funktionen bei Anfangs-Randwertproblemen | 119 |
| 2.4 Existenzsätze für Anfangs-Randwertprobleme | 123 |

IV. Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren

| | |
|---|-----|
| 1. Vorbereitungen | 128 |
| 1.1 Neufassung des Entwicklungssatzes für vollstetige und symmetrische Operatoren | 128 |
| 1.2 Projektionsoperatoren | 133 |
| 2. Selbstadjungierte Operatoren | 136 |
| 2.1 Definitionen | 136 |
| 2.2 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren | 139 |
| 2.3 Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators | 141 |
| 2.4 Eigenpakete | 144 |
| 2.5 Zusammenhang zwischen Spektralschar und Eigenpaket | 148 |
| 3. Wesentlich selbstadjungierte Operatoren | 153 |
| 3.1 Definitionen | 153 |
| 3.2 Beispiele | 156 |
| 3.3 Kriterien für die wesentliche Selbstadjungiertheit | 159 |
| 3.4 Ein Kriterium für die wesentliche Selbstadjungiertheit von Differentialoperatoren | 165 |
| 3.5 Beweis des WEYLSchen Lemmas | 170 |
| 4. Die Selbstadjungiertheit von Differentialoperatoren | 175 |
| 4.1 SCHRÖDINGER-Operatoren mit singulärem Potential | 175 |
| 4.2 COULOMB-Potentiale mit Wechselwirkung | 178 |
| 4.3 Halbbeschränkte Differentialoperatoren | 181 |
| 4.4 Zusammenfassung | 186 |
| 4.5 Der tiefste Punkt des Spektrums eines halbbeschränkten Operators | 188 |

V. Das Weyl-Stonesche Eigenwertproblem

| | |
|--|-----|
| 1. Die WEYLSche Alternative | 191 |
| 1.1 Vorbereitung | 191 |
| 1.2 Der 1. WEYLSche Satz | 193 |
| 1.3 Der 2. WEYLSche Satz | 197 |
| 1.4 Die WEYLSche Alternative | 203 |
| 1.5 Ein Kriterium für den Grenzpunktfall bei $x = \infty$ | 204 |
| 2. Die Selbstadjungiertheit des WEYL-STONESchen Operators | 207 |
| 2.1 Der Hauptsatz | 207 |
| 2.2 Der STURM-LIOUVILLESche Operator im \mathfrak{R}_1 | 213 |
| 2.3 Der Entwicklungssatz | 214 |
| 3. Die RELLICHschen Randbedingungen für Grenzkreisfall und Stelle der Bestimmtheit | 218 |
| 3.1 Stelle der Bestimmtheit | 218 |
| 3.2 Die RELLICHschen Anfangszahlen | 219 |
| 3.3 Anwendungen und Beispiele | 226 |
| Anhang I | 239 |
| Anhang II | 241 |
| Anhang III | 244 |
| Anhang IV | 246 |
| Literaturverzeichnis | 247 |
| Namen- und Sachverzeichnis | 250 |