Differentialoperatoren

Differentialoperatoren

der mathematischen Physik

Eine Einführung

Von

Dr. rer. nat. Günter Hellwig
o. Professor an der Technischen Universität Berlin

Springer-Verlag
Berlin/Göttingen/Heidelberg
1964

ISBN-13:978-3-642-92885-7 e-ISBN-13:978-3-642-92884-0
DOI: 10.1007/978-3-642-92884-0

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1964
Library of Congress Catalog Card Number 64 – 16795

Titel-Nummer 1208

Franz Rellich

in memoriam

Vorwort

Dieses Buch will eine Einführung in das Gebiet der Differentialoperatoren sein. Es sollte für Studierende der Mathematik und Physik in den mittleren Semestern bequem lesbar sein. Deshalb wurde eine Einführung in den Hilbertschen Raum und seine Operatoren aufgenommen.

Die Differentialoperatoren der Physik sind meistens partielle Differentialoperatoren. Unter diesen besteht das Interesse heute vornehmlich an solchen partiellen Differentialoperatoren, deren unabhängige Variablen $x_1, \ldots, x_n$ im gesamten $\mathfrak{R}_n$ variieren, weil die Schrödinger-Operatoren der Quantenmechanik diese Eigenschaft besitzen. Deshalb sind solche Operatoren gegenüber den klassischen Operatoren stets bevorzugt behandelt worden.

Im Kapitel I wird eine Einführung in den Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ gegeben. Kapitel II beschäftigt sich mit den Operatoren in $\mathfrak{H}$, wobei als Beispiele für Symmetrie und Halbbeschränktheit nach unten solche partiellen Differentialoperatoren und vornehmlich Schrödinger-Operatoren herangezogen werden.

Das III. Kapitel bringt die Spektraltheorie vollstetiger Operatoren, die für die klassischen Differentialoperatoren ausreichend ist. Im IV. Kapitel wird die Spektraltheorie von Schrödinger-Operatoren entwickelt, wozu die Spektraltheorie von selbstadjungierten Operatoren in $\mathfrak{H}$ unerläßlich ist. Der zentrale Spektralsatz für solche selbstadjungierten Operatoren wird mit Erläuterungen bereitgestellt, nicht dagegen bewiesen. Solche Beweise sind heute in den meisten Lehrbüchern des Hilbertschen Raumes bequem zugänglich.

Das Kapitel V bringt die Spektraltheorie des Weylschen Differentialoperators. Da es sich um einen gewöhnlichen Differentialoperator handelt, hat unsere Darstellung nur skizzenhaften Charakter. Dies konnte um so mehr geschehen, weil in den letzten Jahren zahlreiche ausgezeichnete Lehrbücher über diesen Gegenstand erschienen sind. Dagegen wird die Frage nach den zu stellenden Randbedingungen ausführlicher erörtert, weil die unmittelbar durch die Theorie gelieferten Randbedingungen für die Anwendungen wegen ihres komplizierten Charakters nicht eigentlich brauchbar sind. K. O. Friedrichs und später F. Rellich haben unter zusätzlichen Voraussetzungen bequem verwendbare Randbedingungen angegeben, die jedoch keinen Eingang in die Lehrbuchliteratur gefunden haben. Durch Bereitstellen von Beispielen wird gehofft, das Interesse für diese wichtige Frage zu beleben, die sich eigentlich schon bei sehr einfachen Differentialoperatoren (wie z. B. beim Besselschen) stellt.

Die Frage nach der expliziten Berechnung des Spektrums eines Differentialoperators wird hier nicht behandelt, weil eine solche Berechnung im allgemeinen nur dann gelingt, wenn die Eigenwertgleichung des partiellen Differentialoperators durch Separation der Variablen auf solche für gewöhnliche Differentialgleichungen führt und für diese dann genügend Kenntnisse aus dem Gebiet der speziellen Funktionen vorhanden sind. Eine ausgezeichnete Behandlung dieses Problemkreises findet man in den Büchern von E. C. TITCHMARSH, wozu wesentlich mehr Hilfsmittel über gewöhnliche Differentialoperatoren (insbesondere die TITCHMARSHschen Formeln für die Spektralfunktionen) nötig sind, als in dieser Einführung bereitgestellt werden konnten.

Es bedarf kaum eines Hinweises, daß keinerlei Kenntnisse der Quantenmechanik vom Leser benötigt werden. Die gelegentlichen Hinweise darauf können ohne weiteres übergangen werden.

Das Literaturverzeichnis ist bewußt knapp gehalten, da ein Lehrbuch, welches im Umfange sehr beschränkt ist, nicht in der Lage ist, einen Literaturüberblick über diesen Gegenstand zu geben. Einen ausgezeichneten Überblick vermitteln die Bücher von DUNFORD und SCHWARTZ. Wir kommen auf diese und die anderen in der Einleitung nicht explizit genannten Werke im Text zurück.

Zu danken habe ich meiner Frau und Mitarbeiterin fil. kand. BIRGITTA HELLWIG für ihre Hilfe von der Planung bis zur Fertigstellung, die wesentlich dazu beigetragen hat, manches besser und einfacher zu gestalten. Desgleichen danke ich Herrn Dr. H.-W. ROHDE für seine gewissenhafte Hilfe bei den Korrekturen und dem Springer-Verlag für eine ausgezeichnete Zusammenarbeit.

Berlin, im April 1964 **G. Hellwig**

Inhaltsverzeichnis

I. Der Hilbertsche Raum

II. Lineare Operatoren in $\mathfrak{H}$

III. Spektraltheorie vollstetiger Operatoren

IV. Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren

V. Das Weyl-Stonesche Eigenwertproblem