Teil II.

Axiomatischer Aufbau der Geometrie.

Einleitung.

1. Grundsätze.

Wir haben im Teil I die analytische affine und projektive Geometrie aus der Algebra erklärt und entwickelt, und wir haben für die algebraischen Sachverhalte, die wir zur analytischen Geometrie rechneten, eine geometrische Sprechweise eingeführt. Der Aussage der affinen Geometrie der Ebene, „zwei Punkte bestimmen eine Gerade", entsprach z. B. der Sachverhalt, daß zwei verschiedene Zahlenpaare eine Schar linear abhängiger Zahlenpaare bestimmen und daß die lineare Abhängigkeit von Zahlenpaaren invariant gegenüber den affinen Transformationen ist. Wenn wir also jetzt beantworten sollten, was affine Geometrie der Ebene ist, so könnten wir etwa sagen, die Beschreibung der Eigenschaften von Zahlenpaaren, die invariant gegenüber affinen Transformationen sind. Doch es ist klar, daß wir damit wohl einen bestimmten Teil der Algebra umreißen, daß wir aber damit nicht einen Einblick in die Sätze selbst gewinnen, die wir unter dem Namen „affine Geometrie" zusammenfassen möchten, nämlich in die geometrische Formulierung jener algebraischen Sachverhalte und die logischen Zusammenhänge zwischen diesen Sätzen.

In etwas anderen Worten: die Konstruktion der analytischen affinen Geometrie aus der Algebra ist zwar durchsichtig, und ihre Grundlage, die in angegebenen Gesetzen der Addition und Multiplikation besteht, ist zuverlässig. Aber trotzdem liefert sie uns nicht, was wir als Geometer suchen müssen: eine autonome Begründung der affinen Geometrie. Ob und wie das möglich ist, läßt sich vorderhand nur vermuten. Indem wir aber an die Begründung der Geometrie durch EUKLID als Vorbild denken, werden wir nach Grundsätzen oder Axiomen der affinen Geometrie, oder genauer nach einem System von Axiomen der affinen Geometrie fragen. Was sind Grundsätze? Jedenfalls müssen es richtige Sätze sein, die Sätze müssen zur affinen Geometrie gehören — sie müssen also z. B. Punkte, nicht Zahlen betreffen — und ein System von Grundsätzen muß ein System von Sätzen sein, aus denen sich alle übrigen Sätze der affinen Geometrie durch Definitionen und logische Schlüsse ableiten lassen. Systeme von Axiomen der affinen und projektiven Geometrie zu suchen und einen unmittelbaren Einblick in die logische Struktur dieser Geometrien zu gewinnen, ist das Ziel des zweiten Teiles. Wir werden uns dabei im wesentlichen auf die Geometrie der Ebene beschränken können.

2. Vollständigkeit.

Die wichtigste Arbeit, die bei der Diskussion eines Systems von Grundsätzen zu leisten ist, ist der Nachweis der Vollständigkeit des Systems, die Tatsache also, daß sich aus dem System alle Sätze der Disziplin ableiten lassen. Nun ist aber die Aussage, „ein Axiomensystem ist vollständig", offenbar eine Aussage über Sätze und Gesamtheiten von Sätzen, und es wäre viel eher eine Aufgabe der Logik als der Mathematik, diesen Nachweis zu führen. Denn die Sätze der Mathematik beziehen sich etwa auf Zahlen oder Punkte, also mathematische Gegenstände, und Aussagen über Sätze der Mathematik gehören in die Mathematik selbst nicht hinein. Wir hoben überdies schon in *I.* 2 hervor, daß die Wendung „alle Sätze" der euklidischen Geometrie z. B. unpräzise ist, und somit hat auch der Begriff „Vollständigkeit eines Axiomensystems" keinen genauen Sinn.

Aber dieser Sinn läßt sich präzisieren, und zwar so, daß der Nachweis der Vollständigkeit zu einer rein mathematischen Angelegenheit wird.

Ein System $\mathfrak{S}$ von Grundsätzen der affinen Geometrie der Ebene heißt vollständig, wenn sich aus $\mathfrak{S}$ folgern läßt, daß sich diese Geometrie auch analytisch-algebraisch wie in Kapitel 3 erklären ließe, d. h.

1. jedem Punkte läßt sich eineindeutig ein Paar von Zahlen aus einem Körper oder Schiefkörper K zuordnen,
2. jeder Satz des Systems $\mathfrak{S}$ läßt sich in eine bestimmte algebraische Aussage über Zahlenpaare übersetzen,
3. diese Aussagen über Zahlenpaare sind invariant gegenüber affinen Transformationen.

Es bedarf wohl kaum der Erläuterung, daß diese Präzision der Vollständigkeit im Sinne des damit ursprünglich Gemeinten ist.

Es ist nun klar, wie der Nachweis der Vollständigkeit verlaufen muß: wir müssen aus den Grundbegriffen der Geometrie Zahlen konstruieren, und für diese Zahlen die Rechengesetze der Addition und Multiplikation nachweisen.

3. Auswahl der Axiome.

Sehen wir uns nach Grundbegriffen um, die zur Bildung von Grundsätzen der affinen Geometrie geeignet sind. Die Aussagen der Geometrie beziehen sich letzten Endes, wie schon gesagt, auf Punkte, und die einfachste Beziehung zwischen Punkten ist die lineare Abhängigkeit, das Liegen auf derselben Geraden. Wir betrachten statt dessen jetzt lieber die Geraden als eine zweite Klasse von Gegenständen und nehmen als Grundrelation zwischen Punkten und Geraden das Inzidieren. Für „ein Punkt inzidiert mit einer Geraden" sagen wir auch „ein Punkt liegt auf einer Geraden" oder „eine Gerade geht durch einen Punkt". Außerdem ist die Relation der „Richtungsgleichheit" von Strecken- oder geordneten Punktepaaren nötig, um die Anordnung der Punkte zu beschreiben.

Auf diese beiden Gegenstandsklassen und diese beiden Relationen lassen sich alle Begriffe der affinen Geometrie zurückführen.

Trotzdem führen wir, wenigstens vorläufig, noch eine Relation zwischen Geraden, das „Parallelsein", ein. Sobald bewiesen ist, daß zwei Gerade, die nicht parallel sind, einen Punkt bestimmen, kann man „parallel" durch „punktfremd" oder „nicht mit demselben Punkt inzidieren" ersetzen. Durch eine axiomatische Forderung wollen wir diesen Zusammenhang jedoch, zunächst wenigstens, nicht festlegen.

Die Aufgabe des zweiten Teils ist danach: die Begriffe Punkt, Gerade, inzidieren, richtungsgleich, parallel zu definieren und sodann aus diesen Definitionen heraus einen Körper zu konstruieren, der für die Geometrie die in *II*, 2 angegebene Bedeutung hat. Vor allem geht es dabei um die Einsicht, wie sich Zahlen aus der Geometrie erklären lassen. Das wird nun am klarsten bei Betrachtung der „Gewebe" aus drei bzw. vier Geradenbüscheln, denen unsere axiomatische Untersuchung daher zuerst gilt.

Wir fordern zunächst also nicht, daß je zwei Punkte eine Gerade bestimmen; wir fordern vielmehr nur die Existenz von 3 Scharen paralleler Geraden und später noch die Existenz eines eigentlichen Geradenbüschels. Der Grund für dieses Vorgehen ist, daß wir so Schritt für Schritt jedes Rechengesetz der Zahlen aus geometrischen Eigenschaften von Punkten und Geraden der Gewebe herleiten können, nämlich die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften dafür, daß

1. die Zahlen bezügl. der Addition eine Gruppe bilden,
2. die Zahlen bezügl. der Multiplikation eine Gruppe bilden,
3. das erste distributive Gesetz erfüllt ist,
4. das zweite distributive Gesetz erfüllt ist,
5. die Multiplikation kommutativ ist.

Jeder dieser Tatsachen 1 bis 5 entspricht nämlich ein bestimmter Schließungssatz bzw. eine nicht triviale Figur aus Punkten und Geraden der Gewebe. Dieser schöne Zusammenhang zwischen Algebra und Geometrie würde nicht so klar heraustreten, wenn wir gleich die Existenz aller Punkte und Geraden mit ihren Verknüpfungseigenschaften voraussetzten. Außerdem verlaufen die Beweise bei den engeren Voraussetzungen, die hier gemacht werden, beinahe zwangsläufig, und daher ist die Auswertung der Gewebe-Axiome besonders durchsichtig.

Später wird ein möglichst einfaches System von Axiomen für die affine und die projektive Geometrie angegeben.