

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE
HAMBURG

M. BORN
GÖTTINGEN

C. RUNGE
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT
GÖTTINGEN

BAND XXXII

VORLESUNGEN ÜBER
GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

KURT REIDEMEISTER



SPRINGER-VERLAG

BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

1968

VORLESUNGEN ÜBER
GRUNDLAGEN DER
GEOMETRIE

VON

KURT REIDEMEISTER

BERICHTIGTER NACHDRUCK

MIT 37 TEXTFIGUREN



SPRINGER-VERLAG

BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

1968

Prof. Dr. Kurt Reidemeister
Mathematisches Institut der Universität Göttingen

ISBN-13: 978-3-642-88673-7 e-ISBN-13: 978-3-642-88672-0
DOI: 10.1007/978-3-642-88672-0

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet, dieses Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) oder auf andere Art zu vervielfältigen

Copyright 1930 by Julius Springer in Berlin

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1968

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1968

Library of Congress Catalog Card Number 67-30418

Titel Nr. 5015

HANS HAHN

ZUGEEIGNET

Vorwort.

Das vorliegende Buch ist den Grundlagen der linearen Geometrie gewidmet. Im ersten Teil wird, der Idee des Erlanger Programms von FELIX KLEIN gemäß, die Kongruenz und Invarianz bezüglich beliebiger Gruppen von Transformationen diskutiert und nach Erörterung der Körperaxiome die n -dimensionale lineare Geometrie über Schiefkörpern aus den Gruppen linearer Transformationen erklärt. Daß der gruppentheoretische Aufbau hier zu den Grundlagen gezählt ist, wird, hoffe ich, durch die logisch exakten Formulierungen in Kapitel I gerechtfertigt.

Im zweiten Teil handelt es sich um die Axiomatik der ebenen linearen Geometrie, im wesentlichen also um die Auswertung des Satzes von DESARGUES und des Satzes von PASCAL. Die Bedeutung dieser Sätze für die affine Geometrie ist vor allem durch HILBERTS klassisches Werk über die Grundlagen der Geometrie klargestellt. Der DESARGUESsche Satz besagt, daß die Streckenverhältnisse der Ebene einen Schiefkörper bilden, der PASCALSche Satz besagt, daß sie einen Körper bilden. Der Beweis für diese beiden Tatsachen läßt sich aber auf mannigfache Weise anordnen. Und es erschien mir daher wichtig und lehrreich, dem Grund dieser verschiedenen Möglichkeiten nachzuspüren. Es mußte sich doch jedes Verknüpfungsgesetz der Streckenrechnung in einem wohlbestimmten Schließungssatze sichtbar machen und die logische Abhängigkeit dieser Schließungssätze voneinander feststellen lassen.

Glücklicherweise haben nun diese Schließungssätze auch von anderer Seite her Interesse. W. BLASCHKE hat auf dem Mathematiker-Kongreß in Bologna die Vermutung ausgesprochen, daß die Theorie der Kurvengewebe auch für die Grundlagen der Geometrie fruchtbar werden könnte. Das bestätigte sich hier. Die meisten Schließungssätze, auf die man durch den oben angegebenen Gedanken geführt wird, sind Konfigurationen aus Geraden, die einem Gewebe aus drei oder vier Geradenbüscheln angehören. So könnte man den zweiten Teil des vorliegenden Buches geradezu als eine Axiomatik dieser Gewebe bezeichnen. Ich möchte aber betonen, daß ich nur solche Sätze über Gewebe aufgenommen habe, die mir auch von seiten der ebenen Geometrie wertvoll erschienen.

Spezielle Vorkenntnisse aus der höheren Mathematik werden nirgends vorausgesetzt. Natürlich muß der Leser mit analytischer Geometrie vertraut und für abstrakte Gedanken zugänglich sein. Fräulein FEHRENZ und den Herren BLASCHKE, R. BRAUER, PODEHL, THOMSEN danke ich für Ratschlag und Hilfe.

Königsberg, im Juni 1930.

KURT REIDEMEISTER.

Inhaltsverzeichnis.

Teil I.

Analytischer Aufbau der Geometrie.

Einleitung.

	Seite
1. Geometrie als Analysis.	1
2. Kongruenz und Bewegungen.	1
3. Transitivität der Kongruenz und Gruppeneigenschaft der Bewegungen . .	4
4. Überblick	5

Kapitel I.

Gruppen von Transformationen.

Einleitung	5
1. Eineindeutige Transformationen.	6
2. Das assoziative Gesetz.	6
3. Gruppen	8
4. Untergruppen, Isomorphismen	9
5. Kongruenz	10
6. Bezugsmengen.	12
7. Grundmenge und Koordinatenvektor	13
8. Natürliche Koordinaten	15
9. Transitive, asystatische Gruppen von Transformationen	16
10. Einfach transitive Transformationsgruppen	17
11. Kongruenz nach Untergruppen	18
12. Lineare Transformationen und euklidische Geometrie	19
13. Affine Transformationen, Lineare Abhängigkeit.	20
14. Bezugsmengen.	22
15. Grundmenge, Koordinatenvektoren	22
16. Projektive Transformationen, Lineare Abhängigkeit	23
17. Affine und projektive Transformationen	25
18. Der Begriff des Punktes	26

Kapitel 2.

Grundlagen der Algebra.

Einleitung	28
1. Körper	28
2. Automorphismen, Zentrum, Rationale Zahlen	30
3. Geordnete Körper, Geordnete Gruppen	32
4. Reelle Zahlen als geordnete Gruppe.	34
5. Kommutatives Gesetz der Addition, Unabhängigkeit	36
6. Quaternionen	37
7. Funktionenkörper	39
8. Geordnete Schiefkörper	40
9. Einseitig distributives Zahlensystem	41
10. Die Gleichung $xa + xb = c$	43
11. Über Axiome	43

Kapitel 3.

Affine Geometrie.

	Seite
Einleitung	45
1. Homogene affine Transformationen	45
2. Bezugsmengen.	47
3. Lineare Abhängigkeit von Vektoren.	48
4. Vektorbasis und lineare Abhängigkeit	49
5. Lineare Mannigfaltigkeiten	51
6. Allgemeine homogene lineare Transformationen.	53
7. Geometrische Formulierung der Kongruenzbedingung	54
8. Affine Geometrie	56
9. Affine Abbildungen und Projektionen	57
10. Projektive Transformationen	59
11. Kennzeichnung der Transformationen	60

Teil II.

Axiomatischer Aufbau der Geometrie.

Einleitung.

1. Grundsätze	61
2. Vollständigkeit	62
3. Auswahl der Axiome	62

Kapitel 4.

Gewebe und Gruppen.

Einleitung	64
1. Die Inzidenzaxiome des 3-Gewebes	64
2. Definition der Vektorgleichheit	65
3. Das erste Schließungsaxiom, $\Sigma.1$	66
4. Transitivität der Vektorgleichheit. Eindeutigkeit	67
5. Die drei Vektorgruppen	69
6. Isomorphie der Vektorgruppen	70
7. Analytische Darstellung eines 3-Gewebes.	71
8. Konstruktion eines Gewebes aus einer Gruppe	72
9. Abbildungen eines Gewebes in sich	73
10. Translationen	74
11. Uneigentliche Punkte	75
12. Kommutative Vektorgruppe und Figur $\Sigma.2$	76
13. Figur $\Sigma.1$ folgt aus $\Sigma.2$	78
14. Die Axiome der Anordnung	79
15. Richtungsgleichheit als Vektoreigenschaft	80
16. Vektoren als geordnete Gruppe	82
17. Gewebe und reelle Zahlen	83
18. Stetigkeit und Sechseckgewebe	84
19. Mittelpunkt einer Strecke	85
20. Netz der Punkte $A_{r,s}$	87
21. Archimedisches Axiom im Sechseckgewebe	88
22. Gewebe und affine Ebene	89
23. Kollineationen.	90

Kapitel 5.

Die Vektoren der affinen Ebene.

Einleitung	91
1. Inzidenzaxiome eines 4-Gewebes	93
2. Geradenisomorphismen und Figur $\Sigma.3$	93

	Seite
3. Die Parallelen der \mathfrak{D} -Geraden	94
4. Der kleine Desarguessche Satz $\Sigma. \delta$	96
5. Dreieckssätze	97
6. Proportionen	98
7. Vektoren der affinen Ebene	100
8. Zerlegung eines Vektors in n gleiche Teile	101
9. Rationales Netz. Anordnungsaxiome.	102
10. Kommutative Vektorgruppe	105
11. Figur $\Sigma. 2$ und Figur $\Sigma. \delta$	105
12. Parallelismus in der affinen Geometrie.	107
13. Vektorgleichheit von Dreiecken	108
14. Proportionen. Vektoren	109

Kapitel 6.

Gewebe und Zahlensysteme.

Einleitung	110
1. Die Geradenautomorphismen als Gruppe.	111
2. Die Multiplikation der \mathfrak{A} -Vektoren	113
3. Das Zahlensystem der Vektorpaare	114
4. \mathfrak{D} -Maßzahlen	115
5. Streckenverhältnisse als Zahlensystem	117
6. Analytische Darstellung	119
7. Kollineationen.	121
8. Zweites distributives Gesetz und Figur $\Sigma. 4$	122
9. Das 4-Gewebe mit der Figur $\Sigma. 4$	123
10. Analytische Darstellung eines 4-Gewebes mit Figur $\Sigma. 4$	124
11. Streckenverhältnisse als Schiefkörper	126
12. Literatur über Gewebe.	127

Kapitel 7.

Affine und projektive Geometrie.

Einleitung	128
1. Die Axiome der ebenen affinen Geometrie.	129
2. Begründung der Streckenrechnung aus den affinen Axiomen	130
3. Fundamentalsatz der affinen Geometrie	131
4. Die räumlichen Inzidenzaxiome und der Satz von Desargues	132
5. Die projektiven Inzidenzaxiome.	133
6. Der Satz von Desargues in der projektiven Ebene	134
7. Die Streckenverhältnisse in der projektiven Ebene	135
8. Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie	138
9. Der Satz von Pascal.	140
10. Der Satz von Desargues folgt aus dem Satz von Pascal	141
11. Streckenverhältnisse auf Grund des Pascalschen und kleinen Desargues- schen Satzes.	142
12. Widerspruchsfreiheit der Axiome	144
13. Unabhängigkeit der Axiome	144
14. Algebraischer und geometrischer Aufbau.	145
15. Der empirische Raum	146

Abschnitt 3 von Kapitel 1 z. B. wird mit 1, 3, Abschnitt 2 der Einleitung zu Teil I mit I, 2 zitiert.

Hinweise auf nach 1930 erschienene Literatur 148