Teil I.

Analytischer Aufbau der Geometrie.

Einleitung.

1. Geometrie als Analysis.

Die analytische Geometrie der euklidischen Ebene entsteht, indem jedem Punkt der Ebene mit Hilfe eines Koordinatensystems zwei Zahlen, die Koordinaten des Punktes, zugeordnet und die geometrischen Beziehungen von Punkten in analytischen Beziehungen ihrer Koordinaten ausgedrückt werden. Jedem Satz der Geometrie entspricht alsdann ein bestimmter Satz der Analysis und jedem geometrischen Beweise eines geometrischen Satzes ein bestimmter analytischer Beweis eines analytischen Satzes. Das Umgekehrte aber ist nicht der Fall: es sind nur ganz spezielle Sätze der Analysis, die sich als Sätze der euklidischen Geometrie aussprechen lassen, und es ist daher nichts natürlicher, als nach einem Kennzeichen dieser Sätze — nach einer Kennzeichnung der analytischen Geometrie innerhalb der Analysis, zu fragen.

Diese Kennzeichnung wäre aber auch für die Geometrie selbst von großer Bedeutung; denn ist sie gelungen, so ist damit auch ein Weg angegeben, unabhängig von der Raumanschauung das Gebäude der Geometrie zu errichten.

Die Lösung dieses Problems, die hier behandelt werden soll, ist die folgende: Wir wissen, daß die analytische euklidische Geometrie eng mit gewissen Transformationen, den Bewegungen, zusammenhängt; wir werden sehen, daß sie sich mittels dieser Transformationen definieren läßt. Dem tieferen Grund dieses Zusammenhanges zwischen Geometrie und Transformationen nachzugehen, ist das Ziel des ersten Kapitels. Vor weiteren allgemeinen Erwägungen geben wir sogleich genau die analytische Aufgabe an, als deren Lösung wir die euklidische Geometrie betrachten wollen.

2. Kongruenz und Bewegungen.

x_1, x_2 seien zwei reelle Zahlen. Jedem Paar reeller Zahlen wird durch eine Transformation B der Schar

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + a_1 \\ \bar{x}_2 &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + a_2\,, \end{aligned}$$

wo α, a_1, a_2 ebenfalls reelle Zahlen sind, ein bestimmtes gleiches oder anderes Paar reeller Zahlen $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ zugeordnet. Die Transformationen B mögen „*Bewegungen*" heißen.

Die Gesamtheit der Zahlenpaare $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bildet eine endliche geordnete Menge $\mathfrak{M}$ von n Zahlenpaaren — endlich, weil die Anzahl n der Paare endlich ist, geordnet, weil die Zahlenpaare in bestimmter Weise numeriert sind. Durch eine Transformation B aus der Schar (B) wird jeder geordneten Menge $\mathfrak{M}$ von n Zahlenpaaren eine bestimmte andere geordnete Menge

$$\overline{\mathfrak{M}} = B(\mathfrak{M}), \quad \text{nämlich} \quad \bar{x}_1^{(i)}, \bar{x}_2^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

zugeordnet.

Wir verwenden diese Begriffe zu den folgenden beiden Definitionen:

Def. 1. *Eine Menge* $\mathfrak{M}$ *ist kongruent zu einer Menge* $\overline{\mathfrak{M}}$, *in Zeichen*

$$\mathfrak{M} \equiv \overline{\mathfrak{M}},$$

wenn es eine Transformation B *aus der Schar* (B) *gibt, welche die Menge* $\overline{\mathfrak{M}}$ *der Menge* $\mathfrak{M}$ *zuordnet,* d. h. *wenn*

$$\overline{\mathfrak{M}} = B(\mathfrak{M}).$$

Def. 2. *Eine Eigenschaft einer Menge* $\mathfrak{M}$ *ist invariant bezüglich der Schar* (B), *wenn sie mit* $\mathfrak{M}$ *auch jeder Menge*

$$\overline{\mathfrak{M}} = B(\mathfrak{M})$$

zukommt, wo B *eine beliebige Transformation der Schar* (B) *ist.*

Dann formulieren wir die folgenden beiden Aufgaben:

1. Es sollen die kennzeichnenden invarianten Eigenschaften der Menge $\mathfrak{M}$ *angegeben werden.* Das heißt, man soll solche invariante Eigenschaften einer Menge $\mathfrak{M}$ angeben, die garantieren, daß jede Menge mit denselben Eigenschaften zu $\mathfrak{M}$ kongruent ist. Oder anders gesagt: es sollen Eigenschaften angegeben werden, in denen zwei Mengen $\mathfrak{M}$ und $\overline{\mathfrak{M}}$ übereinstimmen müssen, damit sie kongruent sind.

2. Es sollen solche invariante Eigenschaften $\mathfrak{E}$ *von Mengen angegeben werden, daß umgekehrt die Transformationen* (B) *als diejenigen Transformationen gekennzeichnet sind, welche alle Mengen* $\mathfrak{M}$ *in Mengen* $\mathfrak{M}^*$ *mit denselben Eigenschaften* $\mathfrak{E}$ *transformieren.*

Diese Begriffsbildung, diese Fragen und die Antworten auf diese Fragen sind jedermann bekannt, der mit der analytischen Geometrie der Ebene vertraut ist.

Deutet man nämlich x_1, x_2 und $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ als kartesische Punktkoordinaten bezüglich desselben Koordinatensystems, so bedeuten die Transformationen (B) euklidische Bewegungen. Kongruenten Mengen aus endlich vielen geordneten Punkten entsprechen also im Sinne der Definition (1) kongruente Mengen von Zahlenpaaren und umgekehrt, geometrischen Eigenschaften derartiger Punktmengen — (die ja doch bei Bewegungen erhalten bleiben) — invariante Eigenschaften der Menge ihrer Koordinatenpaare, und die Aufgabe 1 ist sofort so zu beantworten:

1. Alle Mengen, die nur ein Zahlenpaar enthalten, sind zueinander kongruent.

2. Mengen, die zwei Zahlenpaare enthalten, sind dann und nur dann zueinander kongruent, wenn

$$(x_1^{(1)} - x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(1)} - x_2^{(2)})^2 = (\bar{x}_1^{(1)} - \bar{x}_1^{(2)})^2 + (\bar{x}_2^{(1)} - \bar{x}_2^{(2)})^2 .$$

3. Mengen aus drei Zahlenpaaren sind kongruent, wenn:

a) die sich entsprechenden Untermengen aus je zwei Zahlenpaaren kongruent sind und außerdem

b)
$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & 1 \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1^{(1)} & \bar{x}_2^{(1)} & 1 \\ \bar{x}_1^{(2)} & \bar{x}_2^{(2)} & 1 \\ \bar{x}_1^{(3)} & \bar{x}_2^{(3)} & 1 \end{vmatrix}$$

ist[1].

Der Beweis ergibt sich aus dem dritten Kongruenzsatz der euklidischen Geometrie und aus der Erklärung des normierten Flächeninhaltes für Dreiecke mit geordneten Ecken bzw. Dreiecke, für deren Rand noch ein Umlaufssinn festgelegt ist.

4. Mengen aus n Zahlenpaaren sind kongruent, wenn alle Untermengen aus je drei entsprechenden Zahlenpaaren kongruent sind.

Die zweite Frage ist so zu beantworten:

Eine eineindeutige Transformation von Zahlenpaaren, welche die Kongruenz aller Mengen von zwei Paaren und das Vorzeichen einer Determinante, wie unter 3b) angegeben, erhält, ist eine Transformation der Schar (B).

Eine eineindeutige Punkttransformation, welche den Abstand je zweier Punkte unverändert läßt, führt nämlich Gerade in Gerade über; sie erhält die Winkel zwischen je zwei Geraden und ist also eine Bewegung oder aus einer Bewegung und einer Spiegelung zusammengesetzt — je nachdem sie den Umlaufssinn eines Dreiecks erhält oder umkehrt.

Man sieht, daß die rein analytisch definierten Aufgaben, die wir an die Transformationen (B) in natürlicher Weise anknüpfen konnten, in einem wirklich sehr engen Zusammenhange mit der euklidischen Geometrie stehen. Wäre die Bemerkung, daß die geometrischen Eigenschaften einer Punktmenge gerade die invarianten Eigenschaften der Menge der entsprechenden Zahlenpaare und umgekehrt seien, nicht etwas vage, so könnten wir sie geradezu als Definition einer geometrischen

[1] Es ist hinreichend für Kongruenz, außer *3a* nur zu fordern, daß das Vorzeichen der beiden in *3b* genannten Determinanten übereinstimmt.

Aussage verwenden. Von der Ausdrucksweise abgesehen, wären dann die analytische euklidische Geometrie und die Untersuchung invarianter Eigenschaften der Mengen $\mathfrak{M}$ dasselbe, und wir brauchten auch tatsächlich nur diese „Eigenschaften" formallogisch genauer zu umgrenzen, um jenen Zusammenhang sauber beschreiben zu können. Die grundlegende geometrische Eigenschaft aber, der Kongruenzbegriff, ist durch Def. 1 bereits vollständig und genau auf analytischem Wege erklärt.

Eine Verallgemeinerung dieses Kongruenzbegriffes liegt auf der Hand: Wir ersetzen die Transformationen (B) durch geeignete andere Scharen von Transformationen. Und es kommt jetzt alles darauf an, zu sehen, wie die Eigenschaften einer Schar von Transformationen und die Eigenschaften des Kongruenzbegriffes zusammenhängen.

3. Transitivität der Kongruenz und Gruppeneigenschaft der Bewegungen.

Wir werden jedenfalls wünschen, daß der einer Schar von Transformationen zugeordnete Kongruenzbegriff *symmetrisch* und *transitiv* sei, d. h. wir möchten, daß die folgenden beiden uns geläufigen Eigenschaften des Kongruenzbegriffes erhalten bleiben:

Satz 1. *Aus* $\mathfrak{M} \equiv \overline{\mathfrak{M}}$ *folgt* $\overline{\mathfrak{M}} \equiv \mathfrak{M}$, *die Kongruenzrelation ist symmetrisch.*

Satz 2. *Aus* $\mathfrak{M} \equiv \overline{\mathfrak{M}}$ *und* $\overline{\mathfrak{M}} \equiv \mathfrak{M}^*$ *folgt* $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}^*$, *die Kongruenzrelation ist transitiv.*

Aus Satz 1 und 2 folgt, daß jede Menge zu sich selbst kongruent, d. h. die Kongruenzrelation reflexiv ist. Denn ist $\mathfrak{M} \equiv \overline{\mathfrak{M}}$, so ist nach Satz 1, auch $\overline{\mathfrak{M}} \equiv \mathfrak{M}$ und daher nach Satz 2, wie behauptet, $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}$.

Sehen wir zu, wie sich Satz 1 und 2 aus der Definition der Kongruenz in **I,** 2, Def. 1 beweisen läßt. Wir haben zu zeigen:

Zu Satz 1: Gibt es eine Transformation B der Schar (B), so daß

$$\overline{\mathfrak{M}} = B(\mathfrak{M}),$$

so gibt es auch eine Transformation B^*, so daß

$$\mathfrak{M} = B^*(\overline{\mathfrak{M}}).$$

Zu Satz 2: Gibt es eine Transformation B_1, so daß $\overline{\mathfrak{M}} = B_1(\mathfrak{M})$ und eine Transformation B_2, so daß $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = B_2(\overline{\mathfrak{M}})$, so gibt es auch eine Transformation B_3, so daß

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}} = B_3(\mathfrak{M}).$$

Das folgt aber sofort aus den folgenden Eigenschaften der Schar (B):

I. Ordnet eine Transformation B der Schar (B) den Zahlenpaaren x_1, x_2 die Zahlenpaare $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ zu, so gibt es auch eine Transformation der Schar, welche den Werten $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ die Werte x_1, x_2 zuordnet. Diese

Transformation heißt die zur ursprünglichen inverse Transformation und wird mit B^{-1} bezeichnet.

II. Die Schar (B) hat die Gruppeneigenschaft, d. h.: ordnet eine Transformation B_1 den Zahlenpaaren x_1, x_2 die Zahlenpaare $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ zu und eine zweite Transformation B_2 den Zahlenpaaren $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ die Zahlenpaare $\bar{\bar{x}}_1$, $\bar{\bar{x}}_2$, so gibt es eine Transformation B_3 der Schar, welche den Zahlenpaaren x_1, x_2 die Zahlenpaare $\bar{\bar{x}}_1$, $\bar{\bar{x}}_2$ zuordnet.

Offenbar kann man bei allen Mengen $B^* = B^{-1}$ nehmen, und daraus ergibt sich die Symmetrie der Kongruenzrelation. Aus der Gruppeneigenschaft folgt, daß es eine Transformation B_3 gibt, für die bei allen Mengen $\bar{\bar{\mathfrak{M}}} = B_3(\mathfrak{M})$ gilt und damit die Transitivität der Kongruenz.

4. Überblick.

Die Beweise des vorigen Abschnitts setzen nur die in I und II ausgesprochenen Eigenschaften der Bewegungen (B) voraus, und wir werden Transformationsscharen mit diesen Eigenschaften also zur Definition von symmetrischen und transitiven Kongruenzbegriffen ebensogut wie die Bewegungen verwenden können.

Davon wollen wir uns ausführlich und unmittelbar überzeugen. Da es ganz unwichtig ist, daß diese Transformationen gerade Transformationen von Zahlenpaaren sind, formulieren wir dazu einige zwar abstrakte, aber einfache Sätze über eineindeutige Transformationen von Gegenständen, die Gruppeneigenschaft einer Schar von solchen Transformationen und den Kongruenzbegriff, der sich daraus erklären läßt.

Es zeigt sich dabei, daß wir einen besonders einfachen Ausschnitt aus der euklidischen Geometrie bekommen, wenn wir die Bewegungen in die umfassenderen Gruppen der linearen Transformationen, in die Gruppe der affinen und projektiven Transformationen einbetten und die zugehörige affine und projektive Geometrie bilden. Von da ab ist das Buch der linearen Geometrie gewidmet. Im ersten Teil erfolgt ihr analytischer Aufbau. In Kapitel 2 werden die Grundlagen der Algebra erörtert, in Kapitel 3 wird alsdann die n-dimensionale affine Geometrie entwickelt, indem die in Kapitel 1 dargestellten Prinzipien auf Zahlen-n-Tupel und lineare Transformationen aus Schiefkörpern angewendet werden.

Kapitel 1.

Gruppen von Transformationen.

Einleitung.

Die Gruppeneigenschaft von Transformationen führt auf den Begriff der Gruppe, dessen Bedeutung für Algebra und Geometrie sich im folgenden immer von neuem erweisen wird. Die wichtigsten Geometrien lassen sich geradezu als die Diskussion der Struktur der zugehörigen Gruppe auffassen (vgl. **1**, 8 und **1**, 9). Einen näheren Einblick in die