

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung
der Anwendungsgebiete

Band 197

Herausgegeben von

J. L. Doob · A. Grothendieck · E. Heinz · F. Hirzebruch
E. Hopf · W. Maak · S. MacLane · W. Magnus · J. K. Moser
M. M. Postnikov · F. K. Schmidt · D. S. Scott · K. Stein

Geschäftsführende Herausgeber

B. Eckmann und B. L. van der Waerden

Walter Benz

Vorlesungen über Geometrie der Algebren

Geometrien von Möbius, Laguerre-Lie, Minkowski
in einheitlicher und grundlagengeometrischer Behandlung



Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1973

Walter Benz

Ruhr-Universität Bochum, Institut für Mathematik
Bochum

Geschäftsführende Herausgeber:

B. Eckmann

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

B. L. van der Waerden

Mathematisches Institut der Universität Zürich

AMS Subject Classifications (1970)

50D45, 50D50, 50A20, 50D35, 20G15

20G20, 14E05, 14H45

ISBN 978-3-642-88671-3

ISBN 978-3-642-88670-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-88670-6

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1973.

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1973

Library of Congress Catalog Card Number 72-96050

Vorwort

Mit Hilfe der reellen Algebren der komplexen Zahlen, dualen Zahlen, anormal-komplexen Zahlen können Möbiusgeometrie (Geometrie der Kreise), Laguerre- bzw. Liegeometrie, pseudoeuklidische Geometrie (Minkowskigeometrie) behandelt werden. Das geschieht für die erstgenannte Geometrie in der Geometrie der komplexen Zahlen. — Diese Zusammenhänge bilden den Hintergrund des vorliegenden Buches. In Verfolg axiomatischer Begründungen der angegebenen Geometrien wurde der Bereich der vorweg genannten reellen Algebren ausgedehnt: Ist \mathfrak{A} ein quadratisch nicht abgeschlossener kommutativer Körper, \mathfrak{Q} eine quadratische Körpererweiterung von \mathfrak{A} , so gehört zur Algebra \mathfrak{Q} über \mathfrak{A} eine miquelsche Möbiusebene und jede miquelsche Möbiusebene kann mit Hilfe einer solchen Algebra beschrieben werden. Entsprechendes gilt für Laguerre- und Minkowskigeometrie. Es gibt genau 5 paarweise nicht isomorphe kommutative, assoziative Algebren mit Eins vom Rang 3 über den reellen Zahlen; diese beschreiben Geometrien räumlicher Kurvensysteme. Beliebige kommutative Körpererweiterungen eines kommutativen Körpers führen zu miquelschen Geometrien, die eng verwandt sind mit den miquelschen Möbiusebenen, insofern als nur ein impliziter Berührbegriff an die Stelle des bei Möbiusebenen expliziten zu treten hat. Weitere Algebrengeometrien beanspruchen im hier verfolgten Rahmen Interesse, wie etwa die Quaternionen über den komplexen Zahlen, die die Geometrie der Kreise und Kugeln im vierdimensionalen Raum beschreiben.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Autor an mehreren in- und ausländischen Universitäten gehalten hat. An den Anfang der Untersuchungen habe ich die klassischen Fälle, nämlich die Geometrien von Möbius, Laguerre-Lie, Minkowski gestellt. Ich möchte hiermit Tatsachenmaterial bereitstellen, das spätere Ansätze motiviert. Vom systematischen Standpunkt aus hätte man die genannten Geometrien lieber am Abschluß der Erörterungen gesehen, nämlich als geeignete Spezialisierungen des allgemeinen Falles. Natürlich bin ich nicht soweit gegangen, Sätze, die im allgemeinen Falle gelten, in den klassischen Geometrien nachzuweisen. Denn dies ist ja gerade der Reiz einer einheit-

lichen Darstellung, mehr noch: weckt den Wunsch nach einer solchen, Sätze, die *mutatis mutandis* in Einzelfällen gelten, gemeinsam zu beweisen.

Ist \mathfrak{K} ein kommutativer Körper und ist \mathfrak{L} eine kommutative, assoziative Algebra mit Eins über \mathfrak{K} , so wird in Kapitel II der \mathfrak{K} -Algebra \mathfrak{L} eine Geometrie $\Sigma(\mathfrak{K}, \mathfrak{L})$ zugeordnet. Dieser Ansatz (der verallgemeinert werden kann und wurde, was auch in Kapitel IV im Hinblick auf das kommutative Gesetz geschieht) faßt neben den genannten klassischen Fällen eine Reihe allgemeiner Geometrien, die in der Literatur betrachtet wurden, unter einem Dach zusammen. Der genannte Ansatz zusammen mit der Standardbezeichnung Geometrie der komplexen Zahlen stand Pate bei der Namensgebung dieses Buches. Der Kurztitel Geometrie der Algebren wurde allerdings nicht ohne Untertitel benutzt, um das Buch abzugrenzen gegenüber allen geometrischen Untersuchungen im Rahmen von Algebren, die hier nicht berücksichtigt werden konnten.

Neben dem systematischen Aufbau werden Teile der in Kapitel II behandelten Fragen, wie etwa die Berührtheorie, Rückführung harmonischer Lage auf Berührung, Winkeltheorie, Gabelung nach der Parallelitätsrelation in der dargebotenen Allgemeinheit erstmalig der Öffentlichkeit vorgelegt.

Kapitel III ist axiomatischen Fragen gewidmet. Hier wird die van der Waerden, Smidsche Theorie der miquelschen Möbiusebenen gebracht. Das in diesem Zusammenhang wichtige Resultat von Yi Chen, daß nämlich bereits der volle Satz von Miquel aus dem einfachen Satz von Miquel folgt, habe ich ebenfalls mit Beweis aufgenommen. Eine axiomatische Begründung der Liegeometrie, die mit einer Abschwächung des Fundamentalsatzes der Liegeometrie arbeitet, ist auch in Kapitel III aufgenommen zusammen mit einer axiomatischen Charakterisierung der Geometrie von Minkowski. In Kapitel IV widmen wir uns insbesondere dem Studium der fünf räumlichen Fälle, die Geometrien räumlicher Kurvensysteme sind. Des weiteren gebe ich in Kapitel IV einen Ausblick auf den nichtkommutativen Fall, der auf die Geometrie der Quaternionen, diese als Algebra über den komplexen Zahlen aufgefaßt, angewandt wird.

Das Buch ist so abgefaßt, daß es schon von Mathematikstudenten ab dem dritten Semester mit Gewinn zur Hand genommen werden kann. Gelegentliche Einstreuungen, die zum Verständnis weitere Vorkenntnisse erfordern, sind Ergänzungen oder betreffen in Form von Gegenbeispielen den Gültigkeitsbereich gewisser Aussagen; diese Einstreuungen können beim ersten Lesen übergangen werden.

Danken möchte ich allen, die mir im Zusammenhang mit der Abfassung dieses Buches geholfen haben: Herr W. Leißner hat das Buchmanuskript kritisch durchgesehen und viele Verbesserungen vorgenom-

men. Die Ausführungen über Liegeometrie in Kapitel III stammen zudem aus seiner Feder. Herr H. Schaeffer las kritisch Teile des Manuskriptes und half bei der Anfertigung von Literaturverzeichnis und Index. Mrs. Margit Zankl und Fräulein Angelika Blaszkowski halfen bei der Reinschrift, bei der Herstellung von Figuren und Index.

Zu danken habe ich Herrn R. Baer für seine seinerzeitige Anregung, ein Buch zu schreiben. Zu danken habe ich auch dem Verlag für sein stetes und freundliches Entgegenkommen.

Bochum, Januar 1973

Walter Benz

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Der klassische Fall

§ 1. Möbiusgeometrie	1
1. Euklidische Kreise. Möbiussche Kreise	1
2. Die Gruppe $\Gamma(\mathbb{C})$	4
3. Winkel	5
4. Ebene Schnitte einer Kugel. Tetrazyklische Koordinaten	8
5. Möbiusgeometrie	11
§ 2. Laguerregeometrie	11
1. Speere. Zykel	11
2. Das zyklographische Modell	16
3. Das Zylindermodell. Blaschke-Abbildung	17
4. Das isotrope Modell	19
5. Duale Zahlen	21
6. Duale Zahlen in der Laguerregeometrie	26
7. Die Gruppe $\Gamma(\mathbb{D})$	28
8. Tangentialdistanzen	30
9. Isotrope Winkel	35
10. Laguerregeometrie	36
§ 3. Liegeometrie	37
1. Liezykel	37
2. Pentazyklische Koordinaten	38
3. Liefiguren. Die Automorphismengruppe	40
4. Liegeometrie	42
§ 4. Pseudo-euklidische (Minkowskische) Geometrie	42
1. Pseudo-euklidischer Abstand. Pseudo-euklidische Kreise	42
2. Anormal-komplexe Zahlen	43
3. Anormal-komplexe Zahlen in der pseudo-euklidischen Geometrie	45
4. Die Gruppe $\Gamma(\mathbb{A})$	47
5. Die ebenen Schnitte eines Hyperboloids	49
6. Punktparallelität	52
7. Winkel	54
8. Beck-Abbildung. Ein gruppentheoretisches Modell der pseudo-euklidischen Geometrie	63
9. Das Beck-Modell	68
10. Pseudo-euklidische Geometrie	81

Kapitel II. Ketten

§ 1. Projektive Gerade über einem Ring	82
1. Zulässige Paare. Punkte. Parallelität	82
2. Die projektive Gruppe $\Gamma(\mathfrak{Q})$	86
3. Transitivitätseigenschaften von $\Gamma(\mathfrak{Q})$	88
4. Doppelverhältnisse	90
§ 2. Ketten. Eine Berührrelation. Harmonische Punktequadrupel	93
1. Die Kettengeometrie $\Sigma(\mathfrak{R}, \mathfrak{Q})$	93
2. Kettenverwandtschaften	97
3. Die zu $\Sigma(\mathfrak{R}, \mathfrak{Q})$ gehörende affine Geometrie $A(\mathfrak{R}, \mathfrak{Q})$	101
4. Eine Berührrelation. Der Berührsatz. Invarianz der Berührrelation	106
5. Berührung und Doppelverhältnisse	114
6. Harmonische Punktequadrupel	115
§ 3. Winkel	123
1. Winkel in $\Sigma(\mathfrak{R}, \mathfrak{Q})$	123
2. Die Gruppe der freien Winkel	126
3. Winkelsätze. $(8_3, 6_4)$ -Konfigurationen	130
4. Eine allgemeine Ähnlichkeitsgeometrie	136
§ 4. Möbius-, Laguerre-Fall, pseudo-euklidischer Fall	144
1. Gabelung auf Grund der Parallelitätsrelation	144
2. Laguerregeometrien mit ebenen Ketten. Scharfe Berührrelationen	152
§ 5. Klassen von Algebren	158
1. Quadratische Erweiterungen	158
2. Faktorringe und Quotientenringe	160
3. Bemerkungen über Algebren	165
4. Beispiele von Laguerregeometrien	168
§ 6. Das Automorphismenproblem. Der Fundamentalsatz	172
1. Harmonische Abbildungen	173
2. Automorphismenproblem und Fundamentalsatz für die Möbiusgeometrien	175
3. Automorphismenproblem und Fundamentalsatz für die Laguerregeometrien	176
4. Automorphismenproblem und Fundamentalsatz für die pseudo-euklidischen Geometrien	181

Kapitel III. Kreise und Zykel

§ 1. Ein abstrakter Doppelverhältniskalkül	184
1. Quaternare	184
2. γ -Quaternare	186
3. $\beta\gamma\pi$ -Quaternare	187
§ 2. Möbiusgeometrien	192
1. H-Kreisebenen. v. Staudt-Petkantschin-Gruppen. Berührstrukturen. Büschelgruppen	192
2. Möbiusebenen. Miquelsche Möbiusebenen	205
3. Miquelsche Möbiusebenen als Geometrien $\Sigma(\mathfrak{R}, \mathfrak{Q})$	225
4. Weitere Kennzeichnungen von Möbiusgeometrien $\Sigma(\mathfrak{R}, \mathfrak{Q})$, $(\mathfrak{Q} : \mathfrak{R}) = 2$. Euklidische Möbiusebenen	229
5. Ebene Schnitte einer Quadrik	236
6. Orthogonalität. Beziehungen zu Anordnungseigenschaften	238

§ 3. Liegeometrien	251
1. Die Liegeometrien $\mathbf{K}^2(\mathbb{R})$ und ihre Automorphismengruppen	252
2. Lie-Ebenen. Büschelhomogene Lie-Ebenen	265
§ 4. Minkowskigeometrien	294
1. (\mathbf{B}) -Geometrien und ihre Charakterisierung	294
2. (\mathbf{B}^*) -Geometrien und ihre Charakterisierung	298
3. Die Konfiguration (G) und (\mathbf{B}^*G) -Geometrien	299
4. Symmetrie und (\mathbf{B}^*GS) -Geometrien	301
5. (\mathbf{B}^*GS) -Geometrien als Minkowskigeometrien	303

Kapitel IV. Kurven- und Flächensysteme als Kettengeometrien

§ 1. Die Geometrien G_r und Verallgemeinerungen	306
1. Der n -dimensionale Raum als Algebra. Singularitätskegel	306
2. $I(\mathcal{Q})$ als Gruppe birationaler Abbildungen. Darstellung von Ketten	313
3. Das Automorphismenproblem für die Geometrien G_r	316
§ 2. Geometrie der Körpererweiterungen	320
1. Die Gruppe $I(\mathcal{Q})$	320
2. Der Satz von Cartan-Brauer-Hua. Der Satz von Hua	323
3. Ketten. Fahrten	326
4. 2-Sphären auf der 4-Sphäre	329
5. n -Punkt Invarianten und Doppelverhältnisse von n -tupeln	336
6. Das Automorphismenproblem	343

Anhang

1. Relationen	348
2. Geometrische Strukturen	349
3. G -invariante Begriffe, G -Invarianten. Kleinsches Erlanger Programm. Geometrie einer geometrischen Struktur	350
Literaturverzeichnis	351
Literaturzuordnung	362
Sachverzeichnis	364