Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung
der Anwendungsgebiete

Band 197

Walter Benz

Vorlesungen über Geometrie der Algebren

Geometrien von Möbius, Laguerre-Lie, Minkowski in einheitlicher und grundlagengeometrischer Behandlung

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1973

Walter Benz
Ruhr-Universität Bochum, Institut für Mathematik
Bochum

AMS Subject Classifications (1970)
50D45, 50D50, 50A20, 50D35, 20G15
20G20, 14E05, 14H45

ISBN 978-3-642-88671-3 ISBN 978-3-642-88670-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-88670-6

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1973
Library of Congress Catalog Card Number 72-96050

Vorwort

Mit Hilfe der reellen Algebren der komplexen Zahlen, dualen Zahlen, anormal-komplexen Zahlen können Möbiusgeometrie (Geometrie der Kreise), Laguerre- bzw. Liegeometrie, pseudoeuklidische Geometrie (Minkowskigeometrie) behandelt werden. Das geschieht für die erstgenannte Geometrie in der Geometrie der komplexen Zahlen. — Diese Zusammenhänge bilden den Hintergrund des vorliegenden Buches. In Verfolg axiomatischer Begründungen der angegebenen Geometrien wurde der Bereich der vorweg genannten reellen Algebren ausgedehnt: Ist $\mathfrak{K}$ ein quadratisch nicht abgeschlossener kommutativer Körper, $\mathfrak{L}$ eine quadratische Körpererweiterung von $\mathfrak{K}$, so gehört zur Algebra $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ eine miquelsche Möbiusebene und jede miquelsche Möbiusebene kann mit Hilfe einer solchen Algebra beschrieben werden. Entsprechendes gilt für Laguerre- und Minkowskigeometrie. Es gibt genau 5 paarweise nicht isomorphe kommutative, assoziative Algebren mit Eins vom Rang 3 über den reellen Zahlen; diese beschreiben Geometrien räumlicher Kurvensysteme. Beliebige kommutative Körpererweiterungen eines kommutativen Körpers führen zu miquelschen Geometrien, die eng verwandt sind mit den miquelschen Möbiusebenen, insofern als nur ein impliziter Berührbegriff an die Stelle des bei Möbiusebenen expliziten zu treten hat. Weitere Algebrengeometrien beanspruchen im hier verfolgten Rahmen Interesse, wie etwa die Quaternionen über den komplexen Zahlen, die die Geometrie der Kreise und Kugeln im vierdimensionalen Raum beschreiben.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Autor an mehreren in- und ausländischen Universitäten gehalten hat. An den Anfang der Untersuchungen habe ich die klassischen Fälle, nämlich die Geometrien von Möbius, Laguerre-Lie, Minkowski gestellt. Ich möchte hiermit Tatsachenmaterial bereitstellen, das spätere Ansätze motiviert. Vom systematischen Standpunkt aus hätte man die genannten Geometrien lieber am Abschluß der Erörterungen gesehen, nämlich als geeignete Spezialisierungen des allgemeinen Falles. Natürlich bin ich nicht soweit gegangen, Sätze, die im allgemeinen Falle gelten, in den klassischen Geometrien nachzuweisen. Denn dies ist ja gerade der Reiz einer einheitlichen Darstellung, mehr noch: weckt den Wunsch nach einer solchen, Sätze, die mutatis mutandis in Einzelfällen gelten, gemeinsam zu beweisen.

Ist $\mathfrak{K}$ ein kommutativer Körper und ist $\mathfrak{L}$ eine kommutative, assoziative Algebra mit Eins über $\mathfrak{K}$, so wird in Kapitel II der $\mathfrak{K}$-Algebra $\mathfrak{L}$ eine Geometrie Σ ($\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$) zugeordnet. Dieser Ansatz (der verallgemeinert werden kann und wurde, was auch in Kapitel IV im Hinblick auf das kommutative Gesetz geschieht) faßt neben den genannten klassischen Fällen eine Reihe allgemeiner Geometrien, die in der Literatur betrachtet wurden, unter einem Dach zusammen. Der genannte Ansatz zusammen mit der Standardbezeichnung Geometrie der komplexen Zahlen stand Pate bei der Namensgebung dieses Buches. Der Kurztitel Geometrie der Algebren wurde allerdings nicht ohne Untertitel benutzt, um das Buch abzugrenzen gegenüber allen geometrischen Untersuchungen im Rahmen von Algebren, die hier nicht berücksichtigt werden konnten.

Neben dem systematischen Aufbau werden Teile der in Kapitel II behandelten Fragen, wie etwa die Berührtheorie, Rückführung harmonischer Lage auf Berührung, Winkeltheorie, Gabelung nach der Parallelitätsrelation in der dargebotenen Allgemeinheit erstmalig der Öffentlichkeit vorgelegt.

Kapitel III ist axiomatischen Fragen gewidmet. Hier wird die van der Waerden, Smidsche Theorie der miquelschen Möbiusebenen gebracht. Das in diesem Zusammenhang wichtige Resultat von Yi Chen, daß nämlich bereits der volle Satz von Miquel aus dem einfachen Satz von Miquel folgt, habe ich ebenfalls mit Beweis aufgenommen. Eine axiomatische Begründung der Liegeometrie, die mit einer Abschwächung des Fundamentalsatzes der Liegeometrie arbeitet, ist auch in Kapitel III aufgenommen zusammen mit einer axiomatischen Charakterisierung der Geometrie von Minkowski. In Kapitel IV widmen wir uns insbesondere dem Studium der fünf räumlichen Fälle, die Geometrien räumlicher Kurvensysteme sind. Des weiteren gebe ich in Kapitel IV einen Ausblick auf den nichtkommutativen Fall, der auf die Geometrie der Quaternionen, diese als Algebra über den komplexen Zahlen aufgefaßt, angewandt wird.

Das Buch ist so abgefaßt, daß es schon von Mathematikstudenten ab dem dritten Semester mit Gewinn zur Hand genommen werden kann. Gelegentliche Einstreuungen, die zum Verständnis weitere Vorkenntnisse erfordern, sind Ergänzungen oder betreffen in Form von Gegenbeispielen den Gültigkeitsbereich gewisser Aussagen; diese Einstreuungen können beim ersten Lesen übergangen werden.

Danken möchte ich allen, die mir im Zusammenhang mit der Abfassung dieses Buches geholfen haben: Herr W. Leißner hat das Buchmanuskript kritisch durchgesehen und viele Verbesserungen vorgenom-

men. Die Ausführungen über Liegeometrie in Kapitel III stammen zudem aus seiner Feder. Herr H. Schaeffer las kritisch Teile des Manuskriptes und half bei der Anfertigung von Literaturverzeichnis und Index. Mrs. Margit Zankl und Fräulein Angelika Blaszkowski halfen bei der Reinschrift, bei der Herstellung von Figuren und Index.

Zu danken habe ich Herrn R. Baer für seine seinerzeitige Anregung, ein Buch zu schreiben. Zu danken habe ich auch dem Verlag für sein stetes und freundliches Entgegenkommen.

Bochum, Januar 1973

Walter Benz

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Der klassische Fall

Kapitel II. Ketten

Kapitel III. Kreise und Zykel

Kapitel IV. Kurven- und Flächensysteme als Kettengeometrien

Anhang