

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON

J. L. DOOB · E. HEINZ · F. HIRZEBRUCH
E. HOPF · H. HOPF · W. MAAK · W. MAGNUS
F. K. SCHMIDT · K. STEIN

GESCHÄFTSFÜHRENDE HERAUSGEBER

B. ECKMANN UND B. L. VAN DER WAERDEN
ZÜRICH

BAND 66



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GOTTINGEN · HEIDELBERG · NEW YORK
1965

THEORIE DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

AUF FUNKTIONENTHEORETISCHER GRUNDLAGE
DARGESTELLT

VON

LUDWIG BIEBERBACH

ZWEITE

UMGEARBEITETE UND ERWEITERTE AUFLAGE



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GOTTINGEN · HEIDELBERG · NEW YORK
1965

Geschäftsführende Herausgeber:

Prof. Dr. B. Eckmann
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Prof. Dr. B. L. van der Waerden
Mathematisches Institut der Universität Zürich

Alle Rechte,
insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen,
vorbehalten

Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages
ist es auch nicht gestattet, dieses Buch oder Teile daraus
auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie)
oder auf andere Art zu vervielfältigen

ISBN-13: 978-3-642-88467-2 e-ISBN-13: 978-3-642-88466-5

DOI: 10.1007/978-3-642-88466-5

© by Springer-Verlag

Berlin · Göttingen · Heidelberg 1965

Library of Congress Catalog Card Number 64-22704

Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1965

Vorwort zur zweiten Auflage

Aufgabe meines Buches ist auch in dieser zweiten Auflage eine lesbare Darstellung des gegenwärtigen Standes der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen als eines Kapitels der Funktionentheorie. In den zehn Jahren, die seit dem Erscheinen der ersten Auflage vergangen sind, ist manches Neue hinzugekommen und hat der Verfasser auch manches zulernt. Das alles findet seinen Ausdruck in einer gründlichen Umarbeitung des Textes und in vielen Erweiterungen.

Nützlich waren vor allem auch kritische Besprechungen. Ich denke dabei insbesondere an die fundierten Ausführungen in den Reviews und im Zentralblatt. Freilich habe ich mich nicht entschließen können, allen da gegebenen Anregungen zu folgen. Einmal setzen eigener Geschmack und eigene Kenntnisse dem Verfasser gewisse Grenzen. Aber auch sachliche Gründe waren von Einfluß. So sind u. a. auch jetzt die Asymptotika beiseite geblieben, denen ein besonderer Band dieser Sammlung gewidmet werden sollte, ebenso auch die algebraischen Aspekte der Theorie, denen ein besonderer Band gebührt. So interessant und wichtig diese Dinge sind, man kann sie kaum als Kapitel der Funktionentheorie ansehen. Auch glaube ich nicht, daß die nach dem Muster der Theorie der algebraischen Funktionen aufgebaute Lehre von den multiplikativen Funktionen die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen umfaßt. Das kann man erst von der Theorie der multiplikativen Matrizenfunktionen behaupten. Aber diese steckt noch in den Kinderschuhen, wenn man so sagen darf. Das dahin gehörige RIEMANNsche Problem habe ich nur bis zu einer expliziten Lösung im Falle einer Monodromiegruppe mit zwei Erzeugenden und drei vorgegebenen Stellen der Bestimmtheit gefördert. Auch solche explizite Durchführung fehlte bis jetzt. In die Fragwürdigkeiten, in das Chaos um die Vorstellungen von festen und beweglichen Singularitäten hoffe

ich durch Einführung präziser Definitionen etwas Ordnung gebracht zu haben.

Die Darstellung geht nicht nur in einigen Einzelheiten eigene Wege, sondern bietet auch noch an einigen weiteren Stellen sachlich Neues. Ich nenne den Satz von PAINLEVÉ in den §§ 1. und 2., der sich vielfach als entscheidend wichtig erweist. In § 6.14. wird die Abschätzung der Wachstumsordnung der Lösungen auf Systeme ausgedehnt. Die Ausführungen in § 10.2. zeigen, daß der Ansatz von PLEMELJ weit mehr enthält, als man hie und da wahrhaben will. Endlich nenne ich einige Bemerkungen zu den PAINLEVÉSchen Transzendenten in § 12.1.

In der Darstellung gibt es leichtere und schwerere Abschnitte. So hoffe ich nicht nur dem Anfänger sondern auch dem Kenner etwas zu bieten.

Die Verweise auf neuere Literatur habe ich wieder in den Text eingearbeitet. Eine eigentliche Bibliographie zu bieten, scheint mir wegen der Verflochtenheit des Gegenstandes mit anderen Gebieten kaum tunlich. Wegen der älteren Literatur verweise ich nach wie vor auf die im Vorwort zur ersten Auflage erwähnten vier Bücher von LUDWIG SCHLESINGER (Handbuch, Einführung, Vorlesungen, Bericht) sowie auf die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, vor allem die beiden Artikel von EMIL HILB. Zu den eigens der Funktionentheorie der Differentialgleichungen gewidmeten Büchern ist nur eines hinzugekommen: die auch in deutscher gekürzter Übersetzung erschienenen Vorlesungen von W. W. GOLUBEW über Differentialgleichungen im Komplexen, Berlin 1958. Es versteht sich, daß einige im Text meines Buches erwähnte Werke anderer Richtung einzelne Abschnitte über einige einschlägige Fragen enthalten.

Rottach-Egern, im August 1964

BIEBERBACH

Vorwort zur ersten Auflage

Seit SCHLESINGERS Büchern ist dreißig Jahre lang im deutschen Sprachbereich kein der Funktionentheorie der Differentialgleichungen gewidmetes Buch mehr erschienen, wenn auch viele Lehrbücher, wie z. B. das von HORN sowie das in dieser Sammlung erschienene Buch des Verfassers einzelnes aus diesem Gebiet bringen. INCE widmet fast die Hälfte seines rühmlichen Werkes der funktionentheoretischen Seite der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Es sind aber auch schon wieder dreizehn Jahre seit dem Erscheinen dieses Buches vergangen. In jenen Jahrzehnten haben neue funktionentheoretische Methoden ihren Einzug gehalten und haben sich neue Fragestellungen, neue Ergebnisse und Verlagerungen des Schwerpunktes der Interessen gezeigt. Dies alles ist neben der steigenden Bedeutung, die der Gegenstand auch für die Anwendungsgebiete hat, Rechtfertigung genug für das Erscheinen eines neuen Buches, das die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage behandelt.

Ich kann nur eine Auswahl des reichen Stoffes bieten, nicht nur, weil ein Lehrbuch kein Handbuch sein soll, und nicht nur, weil meine Fähigkeiten wie die eines jeden Verfassers begrenzt sind, sondern vor allem deshalb, weil das in diesem Gebiet erstrebte eine nur allzu echte Obermenge des wirklich gesicherten ist. Zudem wird jeder, der über den Gegenstand dieses Buches weiterarbeiten will, zu den trefflichen Encyklopädieartikeln von EMIL HILB greifen müssen.

Meine Darstellung setzt voraus, daß die Elemente der Funktionentheorie zum gesicherten Wissensbestand des Benutzers gehören. Vorkenntnisse aus dem Gebiet der Differentialgleichungen werden nicht vorausgesetzt. Daher enthält das Buch die Partien, die vor allem den Anfänger angehen, in breiter Darstellung und bietet Teile, die erst den Fortgeschrittenen ansprechen, in wesentlich knapperer Diktion. So wird

dem Leser empfohlen, Abschnitte, die ihm Schwierigkeiten bereiten, zunächst zu überschlagen.

Mit Literaturangaben war ich sparsam. Ich habe nur erwähnt, was in der Encyklopädie noch nicht berücksichtigt werden konnte und habe darüber hinaus solche Literaturstellen namhaft gemacht, an die sich meine Darstellung anlehnt. Es versteht sich, daß in dem Buch auch geistiges Eigentum des Verfassers steckt. Dieses zu registrieren, kann füglich den Referatenorganen überlassen bleiben.

Bei den Korrekturen haben mich die Herren GERHARD LYRA, WALTER NOLL, FRIEDEMANN STALLMANN, EGON ULLRICH, HANS WITTICH in trefflicher Weise unterstützt. Ihnen gilt mein herzlicher Dank. Unterhaltungen mit Herrn ISTVÁN SZABÓ waren mir während der Abfassung des Buches von anspornender und belehrender Bedeutung.

Berlin, im Mai 1953

BIEBERBACH

Inhaltsverzeichnis

	Seite
§ 1. Die grundlegenden Existenzsätze	1
1. Die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung	1
2. Calcul des limites. Majorantenmethode	6
3. Analytische Fortsetzung	8
4. Ein Satz von PAINLEVÉ	10
5. Analytische Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsbedingungen und von Parametern	12
6. Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	17
7. Differentialgleichungen n -ter Ordnung	24
8. Lineare Differentialgleichungen und Systeme mit konstanten Koeffizienten	26
9. Schlußbemerkung über allgemeinere lineare Systeme	31
§ 2. Singuläre Stellen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung	32
1. Der Begriff der singulären Stelle der Differentialgleichung	32
2. Der Satz von PAINLEVÉ für uneigentliche Stellen	35
3. Wesentlich singuläre Stellen	37
4. Pole von $f(w, z)$	41
5. Außerwesentlich singuläre Stellen zweiter Art der Differentialgleichung	43
§ 3. Das Verhalten der Lösungen von $dw/dz = (aw + bz)/(cw + dz)$ für konstante a, b, c, d im Punkte $(0, 0)$	44
1. Zwei Beispiele	44
2. Transformation der Differentialgleichungen auf Normalformen	45
3. Klasseneinteilung der Differentialgleichung (3.2.3)	49
§ 4. Außerwesentlich singuläre Stellen zweiter Art	51
1. Ansatz zur Klasseneinteilung	51
2. Integration der partiellen Differentialgleichungen (4.1.19)	54
3. Integration und Klasseneinteilung der Differentialgleichungen (4.1.1)	57
4. Über die Ausnahmewerte $\lambda_1/\lambda_2 = n$ und $\lambda_1/\lambda_2 = 1/n$	59
5. Negativ reelle Werte λ_1/λ_2	63
6. Der Fall $\lambda_1 = \lambda_2$	66
7. Verschwindende Determinante der Linearglieder	67
8. Die BRIOT-BOUQUETSchen Differentialgleichungen (4.7.16) und (4.7.19)	73
9. Algebraische Singularitäten der Differentialgleichung	76
10. Singuläre Integrale	78
11. Verallgemeinerung für Systeme von Differentialgleichungen	81

	Seite
§ 5. Differentialgleichungen erster Ordnung im Großen	86
1. Feste und bewegliche Singularitäten	86
2. Die RICCATISCHE Differentialgleichung	92
3. Ein Satz von MALMQUIST	96
4. Ein Analogon des kleinen PICARDSchen Satzes	110
5. Algebraische Differentialgleichungen	111
6. Ein Satz von RELICH	115
§ 6. Lineare Differentialgleichungen im Kleinen	116
1. Das allgemeine Integral	116
2. Beispiele	119
3. Verlauf der Lösungen in der Nähe einer isolierten singulären Stelle	124
4. Ein Kriterium für außerwesentlich singuläre Stellen	129
5. Berechnung des kanonischen Fundamentalsystems in der Umgebung einer außerwesentlich singulären Stelle	132
6. Berechnung des kanonischen Fundamentalsystems in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle	138
7. Verallgemeinerungen	140
8. Homogene lineare Differentialgleichungen für quadratische Matrizen und Systeme mit konstanten Koeffizienten	146
9. Isolierte singuläre Stellen bei Systemen linearer Differentialgleichungen	159
10. Stellen der Bestimmtheit	163
11. Berechnung der Fundamentalsysteme in der Umgebung einer singulären Stelle	170
12. Integrale, die sich an wesentlich singulären Stellen bestimmt verhalten	181
13. THOMÉS Normalreihen	194
14. Die Wachstumsordnung der Integrale	197
15. Äquivalente singuläre Punkte	200
§ 7. Differentialgleichungen der FUCHSSchen Klasse	202
1. Begriffsbestimmung	202
2. Die determinierenden Gleichungen	204
3. Differentialgleichungen mit ein oder zwei singulären Stellen	205
4. Differentialgleichungen mit drei singulären Punkten	205
5. Differentialgleichungen mit vier singulären Punkten	208
§ 8. Die hypergeometrische Differentialgleichung	210
1. Die hypergeometrische Reihe	210
2. Logarithmenfreies kanonisches Fundamentalsystem bei $z = 0$	213
3. Logarithmenhaltiges kanonisches Fundamentalsystem bei $z = 0$	217
4. Kanonische Fundamentalsysteme für $z = 1$ und $z = \infty$	219
5. Funktionalgleichungen für die hypergeometrische Funktion	220
6. Analytische Fortsetzung von $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$	224
7. Beweise zur analytischen Fortsetzung	228
8. Analytische Fortsetzung der übrigen Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung	233
9. Analytische Fortsetzung in den Ausnahmefällen	239
10. Die Monodromiegruppe	246
11. RIEMANNS Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion	251
12. Die SCHWARZsche Differentialgleichung	252

	Seite
13. Konforme Abbildung	254
14. Algebraische Integrale linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten	255
15. Das RIEMANNSCHE Problem	264
§ 9. Die BESSELSche Differentialgleichung	280
1. Fundamentalsystem bei $z = 0$	280
2. Die BESSELSche Differentialgleichung als Grenzfall der RIEMANNSchen	283
3. Asymptotisches Verhalten der Funktion $J_n(z)$ für $z \rightarrow \infty$	284
4. Zusammenhang mit THOMÉS Normalreihen	293
5. Elementare Integrale der BESSELSchen Differentialgleichung	295
§ 10. Differentialgleichungen der FUCHSSchen Klasse mit vier singulären Punkten	311
1. Uniformisierung	311
2. Ein Satz von PLEMELJ	314
3. Randwertaufgaben	323
4. Obertheoreme	326
5. Die LAMÉSche Differentialgleichung	328
§ 11. Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten	329
1. Periodische Lösungen	329
2. Das allgemeine Integral	334
3. Stabilität und Instabilität	337
4. Doppelperiodische Koeffizienten	344
§ 12. Einige weitere Untersuchungen	349
1. Die PAINLEVÉSchen Transzendenten	349
2. HÖLDERS Satz über die Gammafunktion	356
3. Ein Satz von HURWITZ	360
4. Untersuchungen von WITTICH	364
5. Das Prinzip von ZEEV NEHARI	367
6. Nullstellenfreie Gebiete	378
7. Randwertaufgaben	380
Namen- und Sachverzeichnis	386