

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK UND IHRER GRENZGEBIETE

UNTER MITWIRKUNG DER SCHRIFTFLEITUNG DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK“

HERAUSGEGEBEN VON

L. V. AHLFORS · R. BAER · F. L. BAUER · R. COURANT · A. DOLD
J. L. DOOB · S. EILENBERG · P. R. HALMOS · M. KNESER
T. NAKAYAMA · H. RADEMACHER · F. K. SCHMIDT
B. SEGRE · E. SPERNER

NEUE FOLGE · HEFT 26

REIHE:

MODERNE FUNKTIONENTHEORIE

BESORGT

VON

L. V. AHLFORS



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

1960

QUASIKONFORME ABBILDUNGEN

VON

HANS P. KÜNZI

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZÜRICH
UND PRIVATDOZENT
AN DER EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

MIT 35 ABBILDUNGEN



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1960

ISBN-13: 978-3-540-02515-3 e-ISBN-13: 978-3-642-88029-2
DOI: 10.1007/978-3-642-88029-2

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet, dieses
Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie)
zu vervielfältigen

© by Springer-Verlag OHG. Berlin · Göttingen · Heidelberg 1960

Vorwort

Die Theorie der quasikonformen Abbildungen gehört gegenwärtig zu einem der modernsten Forschungsgebiete innerhalb der Analysis bzw. der Funktionentheorie. Aus diesem Grunde ist es sicher gegeben, über dieses Gebiet eine Zusammenfassung in Form eines Ergebnisbandes zu schreiben. Daß aber bei einer ersten derartigen Darstellung verschiedene Schwierigkeiten zu überwinden sind, nicht zuletzt auch in rein didaktischer Hinsicht, stellt sich während der Bearbeitung eines solchen Stoffes öfters heraus. So hat es sich unter anderem als recht heikel erwiesen, schon nur die verschiedenen Definitionen, welche über quasikonforme Abbildungen existieren, auf einen einigermaßen gleichen Nenner zu bringen.

Da neben einer russischen Darstellung (VOLKOVYSKIJ [2]) über das vorliegende Forschungsgebiet noch keinerlei Lehrbücher existieren, habe ich besonders Wert darauf gelegt, an einigen Stellen etwas tiefer in die Beweisverfahren einzudringen, als dies üblicherweise in der vorliegenden Reihe der Ergebnishefte der Fall ist.

In verdankenswerter Weise hat mir Herr A. TEBLING verschiedene russische Arbeiten ins Deutsche übersetzt, wodurch es mir ermöglicht wurde, auch die sonst nur schwer zugängliche russische Literatur zu berücksichtigen.

Neben dem hier dargestellten zweidimensionalen Fall beschäftigt sich die neueste Forschung auch schon mit dem Studium der quasikonformen Abbildungen in höherdimensionalen Räumen; doch befindet sich diese Untersuchung noch derart im Flusse, daß eine zusammenhängende Darstellung darüber heute noch nicht möglich ist; in einem Nachtrag wird lediglich auf einige der jüngsten Ergebnisse hingewiesen.

Ich erachte es als eine besonders angenehme Pflicht, an verschiedene Adressen meinen herzlichsten Dank zu richten. An erster Stelle danke ich meinen Lehrern der Funktionentheorie, den Herren Professoren R. NEVANLINNA, A. PFLUGER und H. WITTICH, die durch zahlreiche, wertvolle Ratschläge dazu beigetragen haben, daß dieser Bericht in der vorliegenden Form zustande gekommen ist. Zudem verdanke ich Herrn Professor L. BERS verschiedene Anregungen bei der Gestaltung des 7. Kapitels. Weiteren Dank schulde ich meinen Freunden F. GEHRING, J. HERSCH, O. LEHTO, H. ROYDEN und K. STREBEL, mit denen ich in verschiedenen Diskussionen den zu gestaltenden Text besprochen habe.

Herrn Professor L. AHLFORS sowie dem Springer-Verlag danke ich ebenfalls für das Interesse, das sie dieser Arbeit entgegenbrachten.

Zürich, im Juni 1960

H. P. KÜNZI

Inhaltsverzeichnis

<i>1. Kapitel. Über konforme Abbildungen</i>	1
1.1. Einleitung	1
1.2. Definition eines Ringgebietes	1
1.3. Modulabschätzungen.	1
1.4. Eine Beziehung zwischen dem Modul und dem logarithmischen Flächeninhalt	2
1.5. Monotonieeigenschaft des Moduls	3
1.6. Der reduzierte Modul	3
1.7. Reduzierter Modul und reduzierter logarithmischer Flächeninhalt	5
1.8. Weitere Sätze über den reduzierten Modul	5
1.9. Das Normalgebiet von GRÖTZSCH	6
1.10. Das Normalgebiet von TEICHMÜLLER	7
1.11. Das Normalgebiet von MORI	9
1.12. Die Funktion $\nu(r)$	11
1.13. Der Modul eines Vierecks.	11
1.14. Moduln und extremale Längen	12
1.15. DIRICHLET-Integral und Modul	13
1.16. Die beiden TEICHMÜLLERSCHEN Modulsätze	14
1.17. Anwendung der Modulsätze.	16
<i>2. Kapitel. Quasikonforme Homöomorphismen nach der Definition von GRÖTZSCH</i>	19
2.1. Stetige und stetig differenzierbare Abbildungen	19
2.2. Lokale Eigenschaften des Dilatationsquotienten	23
2.3. Definition der K -quasikonformen Abbildungen nach GRÖTZSCH	24
2.4. Funktionentheoretische Anwendungen	25
2.5. Einfache Beispiele für K -quasikonforme Homöomorphismen	25
2.6. Die Ungleichung von GRÖTZSCH	26
2.7. Der TEICHMÜLLER-WITTICHSCHER Verzerrungssatz	30
2.8. Satz von BELINSKIJ	34
2.9. Satz von R. NEVANLINNA	46
2.10. Eine Verallgemeinerung der Ungleichung von GRÖTZSCH	49
2.11. Punktmengen der Kapazität Null	50
2.12. Die ROBINSCHES KONSTANTE	50
2.13. Durchmesser und Kapazität	52
2.14. Über die KOEBESCHES KONSTANTE	54
2.15. Der AHLFORSCHES VERZERRUNGSSATZ	56
2.16. Ein TEICHMÜLLERSCHES EXTREMALPROBLEM	59
2.17. GRÖTZSCHESCHES EXTREMALPROBLEME	63
2.18. RÄNDERZUORDNUNG	68
<i>3. Kapitel. Anwendungen quasikonformer Abbildungen in der Funktionentheorie</i>	68
3.1. Das Typenproblem	68
3.2. Wertverteilungsprobleme	68
3.3. Der Streckenkomplex	69
3.4. Die Uniformisierung	71

3.5.	Über den Maximalbetrag einiger ganzen transzendenten Funktionen	74
3.6.	Die Lage der a -Stellen	75
3.7.	Beispiele	76
4. Kapitel. Allgemeine K -quasikonforme Homöomorphismen		78
4.1.	Neue Definitionen	78
4.2.	K -quasikonforme Homöomorphismen gemäß einer analytischen Definition	78
4.3.	K -quasikonforme Homöomorphismen gemäß einer geometrischen Definition	79
4.4.	Äquivalenzsatz	80
4.5.	Satz von MORI	80
4.6.	Beweis des Satzes von MORI	83
4.7.	Satz von BERS	86
4.8.	Nachweis für $A - G$	87
4.9.	Satz von PFLUGER	88
4.10.	Die quasikonformen Homöomorphismen nach JENKINS	93
4.11.	Satz von GEHRING	97
4.12.	Sätze über K -quasikonforme Homöomorphismen	97
5. Kapitel. K -quasikonforme Abbildungen		113
5.1.	Die innere Abbildung	113
5.2.	Definition der K -quasikonformen Abbildungen	114
5.3.	Beltramische Differentialgleichung	114
5.4.	Einige Sätze über allgemeine K -quasikonforme Abbildungen	115
5.5.	Normale Familien von K -quasikonformen Abbildungen	117
5.6.	Das Maximumprinzip und das Spiegelungsprinzip	118
5.7.	Die Picard-Liouvillesche Satzgruppe	119
5.8.	Ringeigenschaften der quasikonformen Abbildungen	120
5.9.	Übertragung eines Satzes von BEURLING	121
5.10.	Invariante Klassen Riemannscher Flächen bei quasikonformen Abbildungen	122
5.11.	Die Nevanlinnaschen Hauptsätze für quasimeromorphe Funktionen	126
6. Kapitel. Quadratische Differentiale und extremale quasikonforme Abbildungen		126
6.1.	Die Teichmüllersche Formulierung	126
6.2.	Problemstellung	129
6.3.	Problem A	131
6.4.	Problem B	131
6.5.	Die formale Lösung	132
6.6.	Theorem 1	132
6.7.	Die Extremaleigenschaft	135
6.8.	Die quasikonformen Abbildungen im Mittel	140
6.9.	Infinitesimale Deformationen	143
6.10.	Ein Variationsproblem	144
6.11.	Existenzbeweis nach AHLFORS	146
6.12.	Der Existenzbeweis nach BERS	150
6.13.	Vollständige Lösung einer Extremalaufgabe der quasikonformen Abbildung	153
6.14.	Teichmüller-Räume	154

7. Kapitel. Quasikonforme Abbildungen, Differentialgleichungen und pseudoanalytische Funktionen	155
7.1. Überblick	155
7.2. Das Darstellungstheorem	157
7.3. Nullstellen	158
7.4. Das DIRICHLET-Problem	158
7.5. Verallgemeinerter Riemannscher Abbildungssatz	159
7.6. Die pseudoanalytischen Funktionen	159
7.7. Eigenschaften pseudoanalytischer Funktionen.	162
7.8. LAVRENTIEFFS Fundamentaltheorem für quasikonforme Abbildungen	167
7.9. Lavrentieffscher Abbildungssatz	169
Nachtrag	171
Literaturverzeichnis	172
Namen- und Sachverzeichnis	179