Springer Tracts in Natural Philosophy

Ergebnisse der angewandten Mathematik

Volume 3

Konstruktive Methoden der konformen Abbildung

Dieter Gaier

Springer-Verlag · Berlin · Göttingen · Heidelberg 1964

Dr. rer. nat. Dieter Gaier, Ph. D.
o. Professor für angewandte Mathematik
an der Justus Liebig-Universität Gießen

ISBN-13: 978-3-642-87225-9 e-ISBN-13: 978-3-642-87224-2
DOI: 10.1007/978-3-642-87224-2

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1964

Library of Congress Catalog Card Number 64-19864

Titel-Nr. 6731

Vorwort

Das Erscheinen der elektronischen Rechenanlagen hat für die konstruktiven Methoden der konformen Abbildung einen starken Aufschwung gebracht. Während es früher eine äußerst zeitraubende Aufgabe war, eine konforme Abbildung wenigstens mit mäßiger Genauigkeit herzustellen, wurde es nun möglich, größere Versuchsserien auszuführen und damit die Güte von Verfahren besser zu beurteilen; auch konnten jetzt schwierigere Probleme angegriffen werden, wie etwa die effektive konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete auf Normalgebiete. Dieser von der Praxis herkommende Impuls hat andererseits zahlreiche Mathematiker dazu angeregt, sich mit der theoretischen Durchforschung der Methoden weiter zu beschäftigen. Durch den engen Kontakt zwischen theoretischen Disziplinen (Funktionentheorie, reelle Analysis, Funktionalanalysis) und der Experimentalmathematik haben heute die Methoden der konformen Abbildung eine besondere Anziehungskraft bekommen.

Das vorliegende Buch versucht, diese beiden Aspekte gleichermaßen zu berücksichtigen. Der theoretisch interessierte Leser findet die notwendigen funktionentheoretischen Sätze, Konvergenzuntersuchungen und Fehlerabschätzungen, während andererseits dem Praktiker Anleitung zur Gewinnung konkreter numerischer Ergebnisse gegeben wird. Im Vordergrund stehen die Integralgleichungsmethoden, die das Problem der konformen Abbildung an seiner empfindlichsten Stelle, an der Zuordnung der Ränder, angreifen. Sodann werden Polynome mit Extremaleigenschaften zur konformen Abbildung verwendet, und danach verschiedene weitere, z. T. sehr nützliche Einzelmethoden behandelt. Im Falle mehrfachen Zusammenhangs treten die funktionentheoretischen Iterationsverfahren hinzu, bei denen das Problem auf die konforme Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete reduziert wird. Die zahlreichen ausgewerteten Experimente sollen dem Praktiker helfen, an Hand der Erfahrungen mit den durchgerechneten Beispielen das seinem Problem gemäße Verfahren zu finden; siehe hierzu Todd ([421], S. 2).

Zur Anlage des Buches ist zu sagen, daß seine ersten vier Kapitel im wesentlichen voneinander unabhängig sind, während sich Kapitel V auf die vorangehenden bezieht. Die grundsätzlichen Entwicklungen sind meist ausführlich dargestellt, um die Verwendung des Buches in Vorlesungen und Seminaren zu ermöglichen und dadurch weitere Interessenten zu gewinnen. Andererseits wurde versucht, über sämtliche bekannten Ergebnisse möglichst vollständig zu berichten; die Literatur ist bis Ende 1963 berücksichtigt.

Die Anregung, mich mit konformer Abbildung zu beschäftigen, verdanke ich meinen Lehrern Professor LÖSCH und Professor WALSH, während mich Professor COLLATZ zur Abfassung dieses Buches veranlaßt hat. Professor JOHN TODDs Einfluß ist in den numerischen Teilen des Buches zu spüren; mit Hilfe eines Forschungskontrakts der Office of Naval Research konnte ich im Winter 1960/61 am California Institute of Technology arbeiten. Von besonderem Vorteil für mich war es, daß ich mich beim Lesen der Korrekturen auf eine bewährte Mannschaft von Mitarbeitern, bestehend aus Dr. OTTO HÜBNER, Dr. SIGBERT JAENISCH und Fräulein HELGA BERTRAM, stützen konnte. Gelegentlich haben auch noch die Herren Dr. RUDOLF REPGES, Dipl.-Math. HANS-JOACHIM FROHN und Dipl.-Math. DIETER HOCK mitgeholfen. Ihnen allen gilt an dieser Stelle mein herzlicher Dank.

Gießen, Januar 1964.

DIETER GAIER

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. **Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete durch Lösung von Integralgleichungen mit Neumannschem Kern**

§ 1. Vorbemerkungen 1
1.1. Geometrische Vorbemerkungen und Bezeichnungen 2
a) Rektifizierbare und glatte Kurven 2
b) Bezeichnungen 2
c) Der Neumannsche Kern $K(s, t)$ 3
1.2. Randwerte von Cauchy-Integralen 4

§ 2. Aufstellung der Integralgleichungen 6
2.1. Die Integralgleichung von LICHTENSTEIN 6
2.2. Die Integralgleichung von GERSCHGORIN 8
2.3. Die Integralgleichung von CARRIER 9
2.4. Umformung von $\Phi(s)$ in der Integralgleichung von LICHTENSTEIN . . 11
2.5. Integralgleichungen für Außengebiete 12
a) Der Punkt ∞ ist Fixpunkt 12
b) Der Punkt ∞ ist Bild eines endlichen Punktes 13
2.6. Konforme Abbildung auf ein Horizontalschlitzgebiet 14
2.7. Integralgleichungen für $\theta'(s)$ 15
a) Die Integralgleichung von BANIN 15
b) Die Integralgleichung von WARSCHAWSKI und STIEFEL 16
2.8. Gebiete mit Ecken; Integralgleichung von ARBENZ 16
2.9. Gebiete mit Ecken; Analogon zur Integralgleichung von LICHTENSTEIN 19

§ 3. Iterative Lösung der Integralgleichungen von § 2 21
3.1. Konvergenzaussagen mit Hilfe der Fredholmschen Theorie 22
a) Allgemeine Konvergenzaussagen 22
b) Gewinnung von Fehlerabschätzungen 23
3.2. Konvexe Gebiete 24
3.3. Der Konvergenzbeweis von WARSCHAWSKI 27
a) Eigenwerte und Eigenfunktionen von (3.9) 27
b) Einführung eines Hilbertraumes H und eines Operators T 29
c) Zwei Hilfssätze 30
d) Der Konvergenzbeweis 32
3.4. Untersuchung der Ableitungen und der allgemeinen Integralgleichungen (3.1) 33
a) Konvergenz der Folge $\{\theta_n'(s)\}$ 33
b) Die Integralgleichungen (3.1) 33
c) Folgerungen für die Integralgleichungen von § 2 34
3.5. Abschätzungen für $|\lambda_2|$ 36
a) Abschätzungen für $|\lambda_2|$ durch geometrische Annahmen 36
b) Vergleichssätze 37
3.6. Über die Stieltjes-Integralgleichungen aus 2.8 und 2.9 38

§ 4. Numerische Lösung verschiedener Integralgleichungen von § 2 39
4.1. Diskretisierung der Integralgleichung 40
a) Auffassung als Stieltjes-Integral 40
b) Auffassung als Riemann-Integral 41
c) Diskretisierung der adjungierten Integralgleichung 44
4.2. Abschätzung des Fehlers zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung 45
a) Weitere Eigenschaften von $K(s, t)$ 45
b) Abschätzungen von $f'(s)$ und $f''(s)$ 46
c) Abschätzung des Quadraturfehlers 48
d) Abschätzung von $|f(s_i) - f_i|$ 49
4.3. Lösung des diskreten Problems; Konvergenzbeschleunigung 52
a) Direkte Methoden 52
b) Iterationsmethoden 52
4.4. Bericht über numerische Experimente 55
§ 5. Verschiedenes 59
5.1. Methode der Störungsrechnung 59
5.2. Weitere Methode zur Behandlung von Gebieten mit Ecken 60

Kapitel II. **Das Verfahren von THEODORSEN zur konformen Abbildung von $|\mathfrak{z}| < 1$ auf ein Gebiet**

§ 1. Die Theorie des Verfahrens von THEODORSEN 61
1.1. Konjugierte Funktionen 62
a) Im Einheitskreis konjugierte Funktionen 62
b) Eigenschaften konjugierter Funktionen 63
1.2. Die Integralgleichung von THEODORSEN 64
a) Ableitung der Integralgleichung 64
b) Bestimmung von $f(z)$ für $|z| < 1$ 65
c) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Theodorsenschen Integralgleichung 66
1.3. Iterative Lösung der Integralgleichung von THEODORSEN 67
a) Die Ungleichung von WARSCHAWSKI 68
b) Der Konvergenzbeweis von WARSCHAWSKI 69
1.4. Zusätzliche Ergebnisse zum Theodorsen-Verfahren 71
a) Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit 71
b) Konvergenz der Ableitungen 72
c) Abschätzung von $|f_n(z) - f(z)|$ 72
d) Sternigkeit der Kurven C_n 73
e) Die Bedingung $\varepsilon < 1$ 73
§ 2. Über die Berechnung konjugierter Funktionen 74
2.1. Die Methode von WITTICH 74
a) Ableitung der Formel 75
b) Eigenschaften der Matrix $\mathfrak{W}$ 78

2.2. Andere Methoden mit äquidistanten Knoten 80
a) Die Methode von THEODORSEN 80
b) Die Methode von NAIMAN 82
c) Die Methode von TIMMAN 82
d) Die Methode von MULTHOPP 83
e) Vergleich der Methoden 83
2.3. Verwendung nicht äquidistanter Knoten 84
a) Die Formeln von FLÜGGE-LOTZ 84
b) Die Formeln von MUGGIA 84

§ 3. Numerische Lösung der Integralgleichung von THEODORSEN 85
3.1. Diskretisierung der Integralgleichung 85
a) Ableitung der Vektorgleichung 85
b) Die Operatorgleichung (3.2) 86
c) Geometrische Deutung von $\tilde{\theta}(\varphi)$ 87
3.2. Lösung des diskreten Problems nach dem Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren 87
a) Gesamtschrittverfahren 87
b) Einzelschrittverfahren 89
c) Mittelung beim Gesamtschritt- und Einzelschrittverfahren . . . 89
3.3. Lösung des diskreten Problems nach dem Newton-Verfahren 90
a) Durchführung eines Newton-Schrittes 90
b) Konvergenz des Newton-Verfahrens 91
3.4. Abschätzung des Fehlers zwischen diskreter und kontinuierlicher Lösung 92
a) Vorbemerkungen 93
b) Abschätzung des Fehlervektors $\mathfrak{z}$ 95
c) Abschätzung von $\theta(\varphi) - \tilde{\theta}(\varphi)$ 97
d) Abschätzung von $\log \varrho(\theta(\varphi)) - T(\varphi)$ 98
3.5. Bericht über numerische Experimente 99
a) Durchführung der Rechnung 99
b) Eine Versuchsreihe 100
c) Weitere Experimente 104

§ 4. Verschiedene mit dem Theodorsen-Verfahren verwandte Abbildungsmethoden 105
4.1. Das Verfahren von MATTHIEU, NEHARI und v. KÁRMÁN-TREFFTZ . . 105
a) Ableitung der Funktionalgleichung 106
b) Die erste Näherung 106
4.2. Das Verfahren von KULISCH und MELENTJEW 107
a) Iterative Lösung von (4.1) 107
b) Das Verfahren von BERGSTRÖM 109
4.3. Spezielle Verfahren zur Profilabbildung 110
a) Das Verfahren von TIMMAN 110
b) Das Verfahren von RIEGELS und WITTICH 111
4.4. Das Verfahren von FRIBERG 113
4.5. Störungsmethode von YOSHIKAWA 114
4.6. Weitere Zitate 115

Kapitel III. **Approximation konformer Abbildungen durch Polynome mit Extremaleigenschaften**

§ 1. Zwei Minimalprobleme und ihre Lösung durch Ritz-Ansatz 116

1.1. Vorbereitungen 116

a) Die Räume $L_2(G)$ und $L_2(C)$ 116
b) Die Greensche Formel 118

1.2. Erstes Minimalproblem 118

1.3. Ritz-Ansatz zur Lösung von Problem I 120

a) Existenz und Eindeutigkeit des Minimalpolynoms $P_n(z)$ 121
b) Gewinnung des Minimalpolynoms 122
c) Approximation von $F_0(z)$ durch die Polynome $P_n(z)$ 122

1.4. Zweites Minimalproblem 125

1.5. Ritz-Ansatz zur Lösung von Problem II 127

a) Existenz und Eindeutigkeit des Minimalpolynoms $P_n(z)$ 127
b) Gewinnung des Minimalpolynoms 128
c) Approximation von $F_0(z)$ durch die Polynome $P_n(z)$ 128

§ 2. Die Verwendung orthogonaler Polynome zur konformen Abbildung . . . 131

2.1. Gewinnung der orthogonalen Polynome 132

a) Orthogonalisierungsverfahren von E. SCHMIDT 132
b) Gewinnung der $p_n(z)$ mit Hilfe von Determinanten 132

2.2. Darstellung der Minimalpolynome $P_n(z)$ und der Kernfunktionen . . 133

2.3. Das asymptotische Verhalten der $p_n(z)$ 136

a) Verhalten innerhalb C 136
b) Verhalten auf und außerhalb C 136

2.4. Einige weitere Eigenschaften der Kernfunktionen 139

§ 3. Numerische Gewinnung der Näherungspolynome 140

3.1. Direkte Gewinnung der Minimalpolynome 140

3.2. Durchführung des Orthonormierungsprozesses 142

a) Orthonormierungsprozeß für Vektoren 142
b) Verbesserung eines fast orthogonalen Vektors 144
c) Orthonormierungsprozeß für Funktionen 145
d) Gewinnung der Minimalpolynome $P_n(z)$ 146
e) Orthonormale harmonische Polynome 147

3.3. Bericht über numerische Experimente 147

a) Orthonormale Polynome für das Einheitsquadrat 147
b) Die Versuche von DAVIS-RABINOWITZ und HOCHSTRASSER 149
c) Die Versuche von BERGMAN-HERRIOT 150
d) Weitere Versuche 152
e) Folgerungen 153
f) Zusatz: Bericht über eine neue Versuchsserie 153

Kapitel IV. **Weitere Methoden zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete**

§ 1. Konforme Abbildung eines Gebiets mit Hilfe harmonischer Interpolationspolynome . . . 154
1.1. Lösung des Dirichletschen Problems mit harmonischen Interpolationspolynomen . . . 155
1.2. Anwendung auf die konforme Abbildung . . . 157
1.3. Bericht über numerische Experimente . . . 158
1.4. Modifikation des Verfahrens . . . 162

§ 2. Die Methoden von KANTOROWITSCH . . . 163
2.1. Methode der unendlichen, nichtlinearen Gleichungssysteme . . . 163
2.2. Störungsmethode von KANTOROWITSCH . . . 166
2.3. Konforme Abbildung von Gebiet auf Kreis . . . 168
a) Methode der nichtlinearen Gleichungssysteme . . . 168
b) Störungsmethode . . . 168

§ 3. Polygonabbildungen . . . 169
3.1. Die Schwarz-Christoffelschen Formeln; das Parameterproblem . . . 169
3.2. Weitere Methoden der Parameterbestimmung . . . 171
a) Methode von AHLFORS . . . 171
b) Methode von KUFAREV . . . 172
c) Methode von BERGMAN . . . 172
3.3. Spezielle Polygonabbildungen . . . 173

§ 4. Sonstige Abbildungsverfahren . . . 173
4.1. Schmiegungsverfahren . . . 173
a) Abbildung auf den Einheitskreis . . . 173
b) Abbildung auf die obere Halbebene . . . 175
4.2. Die Methode der Extremalpunkte von LEJA . . . 177
4.3. Analogmethoden . . . 179
a) Gegebene Funktion . . . 179
b) Gegebenes Gebiet . . . 179

Kapitel V. **Konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete auf Normalgebiete**

§ 1. Abbildung auf Normalgebiete . . . 181
1.1. Zusammenstellung der wichtigsten Normalgebiete . . . 182
1.2. Konforme Abbildung auf einen Kreisring . . . 183

§ 2. Die Methode der Integralgleichungen mit Neumannschem Kern . . . 185
2.1. Konforme Abbildung auf ein Horizontalschlitzgebiet . . . 186
a) Unendliches Gebiet . . . 186
b) Endliches Gebiet . . . 188

2.2. Konforme Abbildung auf ein Radialschlitzgebiet 190

2.3. Konforme Abbildung auf einen Kreisring 190

a) Ableitung der Integralgleichung 191
b) Bericht über ein numerisches Experiment 191

2.4. Konforme Abbildung auf einen Kreisring nach ROYDEN 192

§ 3. Erweiterung der Methode von THEODORSEN-GARRICK für Ringgebiete . . 194

3.1. Vorbetrachtungen 194

a) Einige Hilfsfunktionen 194
b) Drei Operatoren in $L_2(-\pi, +\pi)$ 195
c) Das Dirichletsche Problem für den Kreisring 196

3.2. Das Integralgleichungspaar von GARRICK 197

a) Konjugierte Funktionen im Ring 197
b) Ableitung der Integralgleichungen von GARRICK 198
c) Ermittlung von $f(z)$ für $z \in R$ 199
d) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Gleichungen (3.13) und (3.14) 200

3.3. Iterative Lösung der Integralgleichungen von GARRICK 202

a) Aufstellung der Iterationen; Konvergenzsatz 202
b) Beweis des Konvergenzsatzes 203

3.4. Bericht über numerische Experimente 206

§ 4. Funktionentheoretische Iterationsverfahren 208

4.1. Vorbereitende Sätze und Definitionen 208

a) Verzerrungssatz für Kreisringabbildungen 208
b) Zwei Abschätzungen für Ringgebiete 211
c) Spiegelung von Gebieten 212

4.2. Konforme Abbildung auf einen Kreisring nach KOMATU 214

a) Angabe des Verfahrens 214
b) Konvergenz und Fehlerabschätzung 215
c) Die Form der Kurven C_m 217

4.3. Variationen des Verfahrens von KOMATU 218

a) Variation des Verfahrens nach HÜBNER 218
b) Variation des Verfahrens nach LANDAU 220
c) Faktorisierung der Kreisringabbildung 220
d) Schmiegungsverfahren 221

4.4. Numerische Durchführung des Verfahrens von KOMATU an einem Beispiel 222

a) Ausgangsgebiet G_0 und exakte Kreisringabbildung 222
b) Anwendung des Komatu-Verfahrens auf das Gebiet G_0 224

4.5. Konforme Abbildung auf ein Vollkreisgebiet 229

a) Schilderung der beiden Koebeschen Verfahren 229
b) Konvergenz der Verfahren 230

c) Faktorisierung der Vollkreisabbildung 232
d) Bericht über ein Experiment 233

4.6. Konforme Abbildung auf Schlitz- und Lemniskatengebiete 235
a) Iterationsverfahren zur Gewinnung der ϑ-Schlitzabbildung . . . 235
b) Konvergenz des Verfahrens 236
c) Konforme Abbildung auf Lemniskatengebiete 238
d) Zusatz: Faktorisierung und iterative Gewinnung beliebiger schlichter Funktionen 240

§ 5. Verschiedene weitere Methoden zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete. 241

5.1. Konforme Abbildung auf Normalgebiete mit Hilfe von Orthonormalsystemen oder der Bergmanschen Kernfunktion 241

5.2. Konforme Abbildung auf Normalgebiete durch Lösung von Extremalproblemen mit direkten Methoden 245
a) Allgemeines Minimumproblem, seine Lösung durch Ritz-Ansatz . 245
b) Approximation der Kernfunktion über ein Minimalproblem . . . 248
c) Approximation von $\varphi_\vartheta(z)$ über ein Minimalproblem. 248

5.3. Konforme Abbildung eines Ringgebiets auf einen Kreisring durch Lösung von Extremalproblemen 249
a) Verwendung der Methode von 5.2,a) 249
b) Extremalprobleme von KHAJALIA 251

5.4. Übertragung der Methoden von KANTOROWITSCH 253

5.5. Sonstige Methoden 256

Anhang

Anhang 1. Hilfsabbildungen 257
a) Einfacher Zusammenhang. 257
b) Zweifacher Zusammenhang 259

Anhang 2. Literatur über Anwendungsgebiete der konformen Abbildung . . . 259

Anhang 3. Konforme Abbildung veränderlicher Gebiete 260
a) Abbildung von Gebiet auf Einheitskreis 261
b) Abbildung von Einheitskreis auf Gebiet 261
c) Weitere Literatur 262

Anhang 4. Ränderzuordnung bei konformer Abbildung 262

Anhang 5. Einige bekannte konforme Abbildungen 264

Literatur 265

Nachträge. 291

Sachverzeichnis 292