



ERGEBNISSE DER MATHEMATIK  
UND IHRER GRENZGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTFLEITUNG

DES

„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK“

ERSTER BAND

---

5

---

FASTPERIODISCHE  
FUNKTIONEN

VON

HARALD BOHR

MIT 10 FIGUREN



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH  
1932

H. Bohr

# Fastperiodische Funktionen

Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg GmbH 1974

## AMS-Subject Classifications (1970) 43A60

ISBN 978-3-540-06299-8      ISBN 978-3-642-86689-0 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-642-86689-0

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf fotomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwendung, vorbehalten.  
Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© Copyright 1932 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1932  
Library of Congress Catalog Card Number 73-10717

## Vorwort.

Das Jahr 1930—31 verbrachte ich in Amerika, indem ich einer freundlichen Einladung zufolge an verschiedenen Universitäten der Vereinigten Staaten Vorlesungen und Vorträge hielt. So trug ich unter anderem in Stanford, Berkeley und Princeton über die Theorie der fastperiodischen Funktionen vor. Von verschiedener Seite wurde ich aufgefordert, die betreffende kleine Vorlesungsreihe zu veröffentlichen, und ich kam daher einer freundlichen Aufforderung des Herausgebers und des Verlages Julius Springer, sie in der Sammlung „Ergebnisse der Mathematik“ erscheinen zu lassen, mit großer Freude nach. Den eigentlichen Vorlesungen, die als eine möglichst bequeme Einführung in die Theorie gedacht sind, und welche ausführlich und elementar dargestellt sind, habe ich bei der vorliegenden Ausarbeitung zwei kleinere ergänzende Anhänge von skizzenhaftem Charakter hinzugefügt.

Indem ich hiermit diese Vorlesungen herausgebe, habe ich wieder an die schöne und bereichernde Zeit in Amerika sowie an die mir von allen Seiten erwiesene große Liebenswürdigkeit zurückdenken müssen, und ich erlaube mir die Gelegenheit zu benutzen, meinen amerikanischen Kollegen und Freunden nochmals meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Bei der endgültigen Bearbeitung und Fertigstellung des Manuskriptes in einer Zeit, wo ich selbst krank lag, hat mein Freund und Mitarbeiter, Dr. BÖRGE JESSEN, mir in der sorgfältigsten Weise geholfen und dabei auch verschiedene Vereinfachungen und Verbesserungen vorgeschlagen; für all seine Hilfe möchte ich ihm auch an dieser Stelle aufrichtig danken.

*Fynshav*, August 1932.

**HARALD BOHR.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>Einleitung (§§ 1—10)</b> . . . . .	1
<b>Reinperiodische Funktionen und ihre Fourierreihen</b> . . . . .	6
§§ 11—13. Allgemeines Orthogonalsystem . . . . .	6
§§ 14—15. Fourierkonstanten bezüglich eines normierten Orthogonal- systems. Ihre Minimaleigenschaft. BESSELSche Formel und BESSELSche Ungleichung . . . . .	8
§§ 16—17. Fourierreihen periodischer Funktionen. . . . .	10
§§ 18—22. Das Rechnen mit Fourierreihen . . . . .	11
§§ 23—25. Zwei fundamentale Sätze. Der Eindeutigkeitsatz und die PARSEVALSche Gleichung. . . . .	14
§ 26. Der LEBESGUESche Beweis des Eindeutigkeitsatzes . . . . .	16
§§ 27—29. Der Multiplikationssatz . . . . .	18
§§ 30—33. Summabilität der Fourierreihe. Der FEJÉRSche Satz . . . . .	19
§§ 34—36. Der WEIERSTRASSSche Satz . . . . .	22
§§ 37—38. Zwei Bemerkungen . . . . .	24
<b>Die Theorie der fastperiodischen Funktionen</b> : . . . . .	26
§ 39. Das Hauptproblem der Theorie . . . . .	26
§§ 40—41. Verschiebungszahlen . . . . .	26
§§ 42—44. Definition der Fastperiodizität . . . . .	27
§§ 45—47. Zwei einfache Eigenschaften fastperiodischer Funktionen . . . . .	29
§§ 48—49. Die Invarianz der Fastperiodizität gegenüber einfachen Rechen- operationen . . . . .	31
§§ 50—54. Der Mittelwertsatz . . . . .	34
§§ 55—63. Der Begriff der Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion. Aufstellung der PARSEVALSchen Gleichung . . . . .	41
§§ 64—69. Das Rechnen mit Fourierreihen . . . . .	46
§§ 70—73. Der Eindeutigkeitsatz. Seine Äquivalenz mit der PARSEVAL- schen Gleichung . . . . .	52
§§ 74—76. Der Multiplikationssatz . . . . .	56
§§ 77—79. Einleitende Bemerkungen zu dem Beweis der beiden fundamen- talen Sätze . . . . .	58
§§ 80—82. Vorbereitungen für den Beweis des Eindeutigkeitsatzes . . . . .	60
§ 83. Beweis des Eindeutigkeitsatzes . . . . .	66
§§ 84—92. Der Hauptsatz . . . . .	69
§ 93. Ein wichtiges Beispiel . . . . .	75
<b>Anhang I. Verallgemeinerungen fastperiodischer Funktionen (§§ 94—102)</b> . . . . .	78
<b>Anhang II. Fastperiodische Funktionen einer komplexen Veränderlichen</b> (§§ 103—112) . . . . .	85
<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	96