

This series aims to report new developments in mathematical economics and operations research and teaching quickly, informally and at a high level. The type of material considered for publication includes:

1. Preliminary drafts of original papers and monographs
2. Lectures on a new field, or presenting a new angle on a classical field
3. Seminar work-outs
4. Reports of meetings

Texts which are out of print but still in demand may also be considered if they fall within these categories.

The timeliness of a manuscript is more important than its form, which may be unfinished or tentative. Thus, in some instances, proofs may be merely outlined and results presented which have been or will later be published elsewhere.

Publication of *Lecture Notes* is intended as a service to the international mathematical community, in that a commercial publisher, Springer-Verlag, can offer a wider distribution to documents which would otherwise have a restricted readership. Once published and copyrighted, they can be documented in the scientific literature.

Manuscripts

Manuscripts are reproduced by a photographic process; they must therefore be typed with extreme care. Symbols not on the typewriter should be inserted by hand in indelible black ink. Corrections to the typescript should be made by sticking the amended text over the old one, or by obliterating errors with white correcting fluid. Should the text, or any part of it, have to be retyped, the author will be reimbursed upon publication of the volume. Authors receive 75 free copies.

The typescript is reduced slightly in size during reproduction; best results will not be obtained unless the text on any one page is kept within the overall limit of 18 x 26.5 cm (7 x 10 1/2 inches). The publishers will be pleased to supply on request special stationery with the typing area outlined.

Manuscripts in English, German or French should be sent to Prof. Dr. M. Beckmann, Department of Economics, Brown University, Providence, Rhode Island 02912/USA or Prof. Dr. H. P. Künzi, Institut für Operations Research und elektronische Datenverarbeitung der Universität Zürich, Sumatrastraße 30, 8006 Zürich.

Die „*Lecture Notes*“ sollen rasch und informell, aber auf hohem Niveau, über neue Entwicklungen der mathematischen Ökonometrie und Unternehmensforschung berichten, wobei insbesondere auch Berichte und Darstellungen der für die praktische Anwendung interessanten Methoden erwünscht sind. Zur Veröffentlichung kommen:

1. Vorläufige Fassungen von Originalarbeiten und Monographien.
2. Spezielle Vorlesungen über ein neues Gebiet oder ein klassisches Gebiet in neuer Betrachtungsweise.
3. Seminaerausarbeitungen.
4. Vorträge von Tagungen.

Ferner kommen auch ältere vergriffene spezielle Vorlesungen, Seminare und Berichte in Frage, wenn nach ihnen eine anhaltende Nachfrage besteht.

Die Beiträge dürfen im Interesse einer größeren Aktualität durchaus den Charakter des Unfertigen und Vorläufigen haben. Sie brauchen Beweise unter Umständen nur zu skizzieren und dürfen auch Ergebnisse enthalten, die in ähnlicher Form schon erschienen sind oder später erscheinen sollen.

Die Herausgabe der „*Lecture Notes*“ Serie durch den Springer-Verlag stellt eine Dienstleistung an die mathematischen Institute dar, indem der Springer-Verlag für ausreichende Lagerhaltung sorgt und einen großen internationalen Kreis von Interessenten erfassen kann. Durch Anzeigen in Fachzeitschriften, Aufnahme in Kataloge und durch Anmeldung zum Copyright sowie durch die Versendung von Besprechungsexemplaren wird eine lückenlose Dokumentation in den wissenschaftlichen Bibliotheken ermöglicht.

Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems

Economics, Computer Science, Information and Control

Edited by M. Beckmann, Providence and H. P. Künzi, Zürich

17

H. Bauer

IABG, Ottobrunn

K. Neumann

Rechenzentrum der Universität Karlsruhe

Berechnung optimaler Steuerungen

Maximumprinzip und
dynamische Optimierung



Springer-Verlag

Berlin · Heidelberg · New York 1969

Advisory Board
H. Albach · F. Ferschl · H. Krelle
N. Wirth

ISBN 978-3-540-04643-1

ISBN 978-3-642-85741-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-85741-6

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, reprinting, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1969. Library of Congress Catalog Card Number 74-99866
Title No. 3766

V o r w o r t

Diese Veröffentlichung entstand aus dem Wunsch, die beiden grundsätzlichen Möglichkeiten, Kontrollprobleme zu lösen - die Methode der dynamischen Optimierung und die auf dem PONTRJAGINSchen Maximumprinzip beruhenden Verfahren -, nebeneinander darzustellen. Gewöhnlich ist in der Literatur immer nur jeweils eines der beiden Themen Gegenstand der Behandlung.

Die Kontrolltheorie - auch Theorie der optimalen Prozesse genannt - befaßt sich mit der optimalen Steuerung physikalischer, technischer, wirtschaftlicher und anderer Prozesse. So kann es sich beispielsweise um die Steuerung einer Rakete von einem Startpunkt in einen Zielpunkt oder ein Zielgebiet handeln derart, daß der Treibstoffverbrauch oder die Flugzeit möglichst klein werden, oder es ist die optimale Wahl der Temperatur im Verlaufe einer chemischen Reaktion gesucht. Ferner kann etwa im Bereich der wirtschaftlichen Anwendungen nach der optimalen Investitionspolitik innerhalb einer bestimmten Zeitperiode gefragt sein. Mathematisch sind die betrachteten Prozesse durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit gewissen Anfangs- und Endbedingungen, dessen rechte Seite noch von einer sogenannten Steuerfunktion abhängt, charakterisiert. Diese Steuerfunktion ist dann so zu bestimmen, daß eine gewisse den betreffenden Prozeß bewertende Zielgröße minimiert wird.

Wie schon aus dem Titel hervorgeht, wird neben einem kurzen Abriß der theoretischen Grundlagen der Kontrollprobleme vor allem Wert auf eine Diskussion der zur Verfügung stehenden Lösungsverfahren gelegt. Die Verfasser haben sich dabei bemüht, nicht nur Lösungsverfahren anzugeben, sondern auch die Bedingungen, unter denen die betreffenden Verfahren jeweils zum Ziel führen, ausführlich herzuleiten (gerade in der Literatur über dynamische Optimierung fehlt eine strenge Begründung der angegebenen Rechenverfahren oft völlig).

Kapitel I enthält einige grundlegende Begriffe sowie Sätze zur Kontrolltheorie. Nach der Diskussion mehrerer Beispiele für Kontrollprobleme wird zunächst eine allgemeine Formulierung der der Kontrolltheorie zugrundeliegenden Problemstellung gegeben. Danach werden einige Sätze bewiesen, die vor allem für den am Schluß von Kapitel I gebrachten Existenzsatz sowie für Kapitel II von Bedeutung sind.

Kapitel II ist der dynamischen Optimierung gewidmet. Im ersten Paragraphen werden das BELLMANsche Optimalitätsprinzip sowie die grundlegende Funktionalgleichung der dynamischen Optimierung hergeleitet und zwei darauf aufbauende Lösungsmethoden diskutiert. Der nächste Paragraph enthält neben einigen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen im wesentlichen Konvergenzbetrachtungen zu den Lösungsverfahren. Im letzten Paragraphen wird die numerische Realisierung der Methode der dynamischen Optimierung behandelt.

Kapitel III befaßt sich mit der Lösung von Kontrollproblemen mit Hilfe des Maximumprinzips. Zunächst werden das Maximumprinzip und die Transversalitätsbedingung für den allgemeinen nichtlinearen Fall formuliert. In den

weiteren Paragraphen werden die Theorie der linearen Kontrollprobleme und anschließend Lösungsverfahren für lineare Aufgaben mit vorgegebenem Endzeitpunkt und lineare zeitoptimale Probleme behandelt. Der letzte Paragraph enthält Methoden zur Lösung nichtlinearer Kontrollprobleme.

In einem Anhang sind Hilfsmittel aus der Theorie der konvexen Mengen und Funktionen, der Integrationstheorie und der Funktionalanalysis zusammengestellt. Verweise auf den Anhang sind dadurch gekennzeichnet, daß der jeweiligen Nummer eines Satzes oder einer Definition ein A vorangestellt ist.

Die Kapitel I und II sind im wesentlichen von K. NEUMANN, Kapitel III von H. BAUER verfaßt worden. Für Kapitel III ist dabei aus den vorhergehenden Kapiteln lediglich die Kenntnis von § 2 erforderlich. Nur gelegentlich treten Querverweise auf, die aber für das Verständnis des betreffenden Abschnittes unwesentlich sind.

Die Verfasser danken Herrn R. BEUSCHEL für viele Hinweise vor allem für den Abschnitt über die numerische Realisierung der Methode der dynamischen Optimierung. Ihr besonderer Dank gilt Fräulein M. HEEG für die überaus sorgfältige Fertigstellung des Manuskriptes.

München, Karlsruhe, Mai 1969

H.BAUER, K.NEUMANN

Inhaltsverzeichnis

I. Grundlegende Begriffe und Sätze

§ 1. Praktische Beispiele für Kontrollprobleme	1
§ 2. Problemstellung und Voraussetzungen	10
2.1 Allgemeine Formulierung von Kontrollproblemen	10
2.2 Voraussetzungen	13
§ 3. Stetigkeit des Zielfunktional $F(y)$	18
3.1 Eindeutige Lösbarkeit der Differentialgleichungsnebenbedingung	18
3.2 Stetige Abhängigkeit des Zustandsvektors von der Steuerung und Stetigkeit des Zielfunktional	22
§ 4. Existenz und Eindeutigkeit optimaler Steuerungen	27
4.1 Existenzsatz	27
4.2 Eindeutigkeitssatz	33

II. Dynamische Optimierung

§ 5. Ermittlung einer Näherungslösung für Kontrollprobleme mit vorgegebenem Endzeitpunkt mit Hilfe der BELLMANschen Funktionalgleichung	35
5.1 Vorbemerkungen	35
5.2 Einführung von Treppenfunktionen	36
5.3 Das BELLMANsche Optimalitätsprinzip	39
5.4 Berechnung einer optimalen Politik	43
5.5 Bestimmung der möglichen Anfangswerte	47

§ 6. Sätze zur Theorie der dynamischen Optimierung	53
6.1 Existenz und Eindeutigkeit optimaler Politiken	53
6.2 Rechtfertigung der Konstruktion von Treppenfunktionenräumen	56
6.3 Minimalfolgeeigenschaft der Folge $\{y_{r_k}^*\}$	60
6.4 Konvergenz einer Minimalfolge gegen eine optimale Steuerung	62
§ 7. Numerische Realisierung der Methode der dynamischen Optimierung	68
7.1 Numerische Durchführung der Verfahren I und II von Abschnitt 5.4	68
7.2 Ein Iterationsverfahren	75
III. Ermittlung optimaler Steuerungen mit Hilfe des Maximumprinzips	
§ 8. Das Maximumprinzip und die Transversalitätsbedingung	79
8.1 Problemstellung und Voraussetzungen	79
8.2 Das Maximumprinzip	83
8.3 Die Transversalitätsbedingung	85
8.4 Bemerkungen zum Maximumprinzip und zur Transversalitätsbedingung	89
§ 9. Zur Theorie der linearen Kontrollprobleme	93
9.1 Formulierung des linearen Kontrollproblems	93
9.2 Die Menge der erreichbaren Punkte	95
9.3 Extremale Steuerungen	103
9.4 Eindeutigkeit extremaler Steuerungen	109

§ 10. Optimale Steuerung linearer Kontroll- probleme mit vorgegebenem Endzeitpunkt	117
10.1 Aufgaben ohne Zielbedingung	117
10.2 Aufgaben mit einem Zielpunkt	119
§ 11. Lineare zeitoptimale Probleme	128
11.1 Problemstellung und Existenz einer optimalen Steuerung	128
11.2 Hilfssätze zum Lösungsverfahren	132
11.3 Lösung zeitoptimaler Probleme	139
§ 12. Lösung nichtlinearer Kontrollprobleme	149
12.1 Erstes Lösungsverfahren	149
12.2 Zweites Lösungsverfahren	154
Anhang	169
A1. Konvexe Mengen und Funktionen	169
A2. LEBESGUE-integrable Funktionen	174
A3. Funktionalanalysis	177
Literaturverzeichnis	183
Sachverzeichnis	187