Algebra I

B. L. van der Waerden

Algebra I

Unter Benutzung von Vorlesungen
von E. Artin und E. Noether

Mit einem Geleitwort von Jürgen Neukirch

Neunte Auflage

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

B. L. van der Waerden
Wiesliacher 5, CH-8053 Zürich, Schweiz

Die achte Auflage erschien 1968 unter gleichnamigem Titel
in der Reihe Heidelberger Taschenbücher Band 12

Die Fotovorlage für die Abbildung auf der Einbandvorderseite
wurde dem Band "I have a Photographic Memory" von P. R. Halmos
mit freundlicher Genehmigung des Autors
und der American Mathematical Society entnommen

Mathematics Subject Classification (1991): 12-01, 13-01, 16-01

ISBN 978-3-642-85528-3 ISBN 978-3-642-85527-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-85527-6

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme
Waerden, Bartel Leendert van der: Algebra/Bartel L. an der Waerden.
Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether.
Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong;
Barcelona; Budapest: Springer 1. 9. Auflage 1993

Softcover reprint of the hardcover 9th edition 1993

Umschlaggestaltung: Design Concept Emil Smejkal, Heidelberg
44/3140 – 5 4 3 2 1 0 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

Geleitwort

Das vorliegende, nunmehr zum neunten Male herausgebrachte Werk von B. L. VAN DER WAERDEN nimmt unter den mathematischen Lehrbüchern eine außergewöhnliche Stellung ein. Selten nur hat in der Vergangenheit ein Lehrbuch eine ähnlich große Wirkung auf das mathematische Leben ausgeübt wie dieses. Seit seinem ersten Erscheinen im Sommer 1930, also vor nunmehr 63 Jahren, haben Generationen von Mathematikern nach ihm die Algebra gelernt, zumindest im deutschsprachigen Bereich. Für zahllose Studenten bedeutete es Eintritt und Aufnahme in die höhere Mathematik, für viele war es die erste Stufe zu wissenschaftlicher Arbeit und mathematischer Forscherlaufbahn.

Worin liegt das Geheimnis eines solch langlebigen Erfolges? Auf diese Frage hätte mancher Autor gern eine Antwort. Der eine versucht eine Verbesserung durch eine breitere Grundlegung, der andere durch vereinfachte Argumentation, ein dritter durch größere Vollständigkeit, ein vierter durch Verwirklichung aller dieser Möglichkeiten – vergebens, einen „van der Waerden" hat es bis heute nicht wieder gegeben. Zieht man einmal andere berühmte Lehrbücher der Vergangenheit zur Betrachtung heran, wie etwa die EULERsche und die WEBERsche „Algebra", den HILBERTschen „Zahlbericht", den „Roten Mumford", die SERREsche „Cohomologie galoisienne" (welche letztere ein Lehrbuch gar nicht hat sein sollen, um dann doch ein so großartiges zu werden), so erkennt man, daß es nicht die systematische Vollständigkeit und die fraglose Vollkommenheit ist, die den Erfolg hervorbringt. Vielmehr scheint in der meisterlichen Handhabung der Unvollkommenheit ein Grund für die Lebensfähigkeit eines Lehrbuches zu liegen, einer Unvollkommenheit, die sich der Phantasie des Lesers öffnet und ihm die Lektüre durch eigene Fragen und Vorstellungen zum Erlebnis werden läßt. Eine solche Meisterschaft ist freilich nicht erlernbar und ist das Kennzeichen eines wahrhaft großen Lehrers.

Ein faßbareres Merkmal, das alle genannten Beispiele mit dem VAN DER WAERDENschen Buch gemein haben, ist das der Neuheit des dargestellten Stoffes. Die uns heute so geläufige „Körpertheorie", das Kernstück des Buches, war bei seinem ersten Erscheinen wohl dem kleinen Kreis der Experten vertraut, aber durchaus nicht der mathematischen Allgemeinheit, obgleich die STEINITZsche Grundlegung der Körpertheorie schon im Jahre 1910 erschienen war. Das algebraische Denken war damals noch vornehmlich vom Rechnen mit einzelnen Polynomen und Gleichungen beherrscht, so daß die ersten Auflagen des VAN DER WAERDENschen Lehrbuches den Namen „Moderne Algebra" in jener Zeit zu recht trugen. Mit seiner neuen abstrakten und begrifflichen Auffassung der Algebra war es geistig wie zeitlich ein Produkt des zwanzigsten Jahrhunderts und ein Wegweiser in die Zukunft. „Nach Vorlesungen von E. ARTIN und E. NOETHER" lautet der Untertitel, und in der Tat meint man die hochmoderne, konzeptionelle Denkweise Emmy Noethers und die Eleganz Artinscher Gedankenführung herauszuspüren.

Nun hat sich im Verlauf der langen Zeit die Mathematik doch wesentlich verändert, und wir leben heute in einer gewandelten Vorstellungswelt. Man muß sich daher der Frage stellen, welchen Sinn eine neuerliche Auflage des alten Buches noch erfüllen kann. Ein Blick hinein gibt heute manchen interessanten Aufschluß über die Akzentsetzung und die Darstellungsweise des Stoffes in vergangener Zeit und somit auch über die Veränderung in den Auffassungen unserer Zeit, die vom kategoriellen und funktoriellen Standpunkt beherrscht werden. Das Buch wird also seinen historischen Wert behalten und verdient allein schon deshalb die Aufnahme in eine Reihe berühmter Klassiker. Es ist aber auch noch immer als Lehrbuch zu empfehlen. Denn in der direkten Zugänglichkeit zu den Grundlagen der Algebra, die ein Kennzeichen des Buches ist, und in der klaren und unmittelbaren Darlegung der Dinge, die sich nicht scheut, die Sprache in den Dienst der Erläuterung zu stellen, wird mancher Studierende auch heute noch einen geebneten Weg zum Verständnis finden. Dies wird ihm zum sicheren Gewinn, wenn sich das Studium in einem guten modernen Lehrbuch der Algebra fortsetzt.

Regensburg, März 1993 JÜRGEN NEUKIRCH

Vorwort zur achten Auflage

Einige Druckfehler, auf die ich durch freundliche Zuschriften aufmerksam gemacht wurde, sind in der vorliegenden Auflage korrigiert worden. Sonst ist alles unverändert geblieben.

Zürich, April 1971 B. L. VAN DER WAERDEN

Vorwort zur siebenten Auflage

Als die erste Auflage geschrieben wurde, war sie als Einführung in die neuere abstrakte Algebra gedacht. Teile der klassischen Algebra, insbesondere die Determinantentheorie, wurden als bekannt vorausgesetzt. Heute aber wird das Buch vielfach von Studenten als erste Einführung in die Algebra benutzt. Daher wurde es notwendig, ein Kapitel über „Vektorräume und Tensorräume" einzufügen, in dem die Grundbegriffe der linearen Algebra, insbesondere der Determinantenbegriff erörtert werden.

Das erste Kapitel „Zahlen und Mengen" wurde entlastet, indem die Ordnung und Wohlordnung in einem neuen neunten Kapitel behandelt wurden. Das Zornsche Lemma wird direkt aus dem Auswahlpostulat hergeleitet. Mit derselben Methode ergibt sich (nach H. KNESER) auch ein Beweis des Wohlordnungssatzes.

In der Galois-Theorie wurden einige Gedanken aus dem bekannten Buch von ARTIN übernommen. Eine Beweislücke in der Theorie der zyklischen Körper, auf die mich mehrere Leser aufmerksam gemacht haben, wurde in § 61 geschlossen. In § 67 wird die Existenz einer Normalbasis bewiesen.

Der erste Band schließt jetzt mit dem Kapitel „Reelle Körper". Die Bewertungstheorie soll erst im zweiten Band dargestellt werden.

Zürich, Februar 1966 B. L. VAN DER WAERDEN

Vorwort zur vierten Auflage

Der kürzlich ganz unerwartet verstorbene Algebraiker und Zahlentheoretiker BRANDT beschließt seine Besprechung der dritten Auflage dieses Werkes im Jahresbericht der D. M. V. 55 folgendermaßen: „Was den Titel anbetrifft, so würde ich es begrüßen, wenn in der vierten Auflage der schlichtere, aber kräftigere Titel „Algebra“ gewählt würde. Ein Buch, das so viel an bester Mathematik bietet, wie sie war, ist und sein wird, sollte nicht durch den Titel den Verdacht erwecken, als ob es nur einer Modeströmung folgte, die gestern noch unbekannt war und vielleicht morgen vergessen sein wird.“

Diesem Rat entsprechend, habe ich den Titel in „Algebra“ geändert.

Einem Hinweis von M. DEURING verdanke ich eine zweckmäßigere Definition des Begriffes „hyperkomplexes System“ sowie eine Ergänzung der GALOIS-Theorie der Kreisteilungskörper, die mit Rücksicht auf ihre Anwendung in der Theorie der zyklischen Körper geboten erschien.

Auf Grund von Zuschriften aus verschiedenen Ländern wurden mehrere kleine Berichtigungen vorgenommen. Allen Briefschreibern sei an dieser Stelle gedankt.

Zürich, März 1955 B. L. VAN DER WAERDEN

Aus dem Vorwort zur dritten Auflage

Schon in der zweiten Auflage wurde die Bewertungstheorie stark ausgebaut. Sie hat inzwischen in der Zahlentheorie und in der algebraischen Geometrie ihre Wichtigkeit immer mehr erwiesen. Daher habe ich das Kapitel Bewertungstheorie sehr viel ausführlicher und deutlicher gemacht.

Vielfachem Wunsche entsprechend, habe ich die Abschnitte über Wohlordnung und transfinite Induktion, die in der zweiten Auflage weggefallen waren, wieder aufgenommen und darauf fußend die STEINITZsche Körpertheorie wieder in voller Allgemeinheit gebracht.

Einem Rat von ZARISKI folgend, wurde die Einführung des Polynombegriffs leicht faßlich gemacht. Auch die Theorie der Normen und Spuren war verbesserungsbedürftig; darauf hat mich Herr PEREMANS freundlichst aufmerksam gemacht.

Laren (Nordholland), Juli 1950 B. L. VAN DER WAERDEN

Inhaltsverzeichnis

Leitfaden

Übersicht über die Kapitel der Bände I und II und ihre logische Abhängigkeit