

# Mathematik für Informatiker

---

Herausgegeben von F. L. Bauer



Friedrich L. Bauer   Martin Wirsing

# Elementare Aussagenlogik

Mit 87 Abbildungen und 6 Tabellen

Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York  
London Paris Tokyo  
Hong Kong Barcelona

Friedrich L. Bauer  
Institut für Informatik, Technische Universität München  
Postfach 202420, D-8000 München 2

Martin Wirsing  
Fakultät für Mathematik und Informatik  
Postfach 2540, D-8390 Passau

CR Subject Classification (1987): A.1, F.4, F.4.1, G.0

ISBN-13:978-3-540-52974-3      e-ISBN-13:978-3-642-84263-4  
DOI: 10.1007/978-3-642-84263-4

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek  
Bauer, Friedrich L.: Elementare Aussagenlogik/Friedrich L. Bauer, Martin Wirsing. - Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona: Springer, 1991  
(Mathematik für Informatiker)  
ISBN-13:978-3-540-52974-3(Berlin...)  
NE: Wirsing, Martin:

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1991

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden könnten.

Von den Autoren auf einem Macintosh in  $\text{\TeX}$  gesetzt.  
45/3140 - 5 4 3 2 1 0 - Gedruckt auf säurefreiem Papier

## Vorwort

Dieses Buch über Elementare Aussagenlogik (wie auch seine geplante Fortsetzung über Elementare Prädikatenlogik und Universelle Algebra) ist aus Vorlesungen entstanden, die an der Technischen Universität München im letzten Jahrzehnt gehalten wurden. Wir waren zu der Überzeugung gekommen, daß für Studierende der Informatik nicht nur ein anderer Aufbau des mathematischen Grundstudiums geboten ist als etwa für Ingenieure oder Physiker, sondern auch ein anderes Menü, als es sich an unseren Universitäten nach den GAMM-NTG-Empfehlungen der siebziger Jahre einbürgerte. Für Informatiker sind vor dem Vordiplom handwerkliche Grundkenntnisse in Logik und Universeller Algebra erforderlich – ohne sie steht im zweiten Studienabschnitt die Praktische Informatik auf tönernen Füßen, und Theoretische Informatik muß als Lückenbüßer für fehlende elementare Grundlagen dienen, wozu sie nicht da ist und was ihr auch nicht gut tut.

Obschon es an guten Büchern über Logik nicht fehlt, konnten uns die vorhandenen deutschsprachigen für den angestrebten Zweck nicht zufriedenstellen. Sie sind fast durchwegs nicht für den Anfänger geschrieben und gehen somit didaktisch nicht auf sein Niveau ein. Sie sind auch in aller Regel nicht für Studierende eines anderen Faches geschrieben, sondern für Studierende der Logik selbst. Da der mathematischen Logik ein Berufsfeld (bisher) fehlte, können diese Bücher ganz dem elitären Anspruch von Monographien huldigen. Manche von ihnen dienen über weite Strecken als Präsentationen des Gedankengebäudes eines Autors, auch als Rechtfertigung für seine Philosophie. Dies ist für die Forschung von überragender Bedeutung, für Anfängervorlesungen jedoch gänzlich unangebracht.

Die Mathematische Logik beginnt nun seit einigen Jahren, ein Berufsfeld zu haben. Möglicherweise ist in zwanzig Jahren der Theoretische Informatiker von heute nicht mehr von einem Angewandten Logiker zu unterscheiden, und der Praktische Informatiker von heute nicht von einem Angewandten Logiker mit der Orientierung zu praktischen Geräten. Es gilt also, sich rechtzeitig auf eine solche Entwicklung einzustellen.

Die Zielsetzung bestimmte die Auswahl des Stoffes. Den Logiker mag es überraschen, daß die Ableitungssysteme der Aussagenlogik erst gegen Ende gebracht werden, und dann nur in gedrängter Form. Die Rechtfertigung sehen wir darin, daß eine elementare Durchführung etwa des Vollständigkeitsbeweises

für auch nur eines dieser Systeme so aufwendig ist, daß man damit weder eine Vorlesungsklasse die ganze Zeit aufmerksam halten noch einen Leser fesseln kann. Wir finden es besser, typische Stücke des Beweises herauszugreifen und in Form von Übungen zu behandeln, womit wenigstens eine handwerkliche Unterweisung verbunden ist.

Das Buch enthält auch viel elementaren Stoff, der sich in den anspruchsvollen Büchern nicht findet, weil er „zu trivial ist“. Davor haben wir nun keine Angst, wenn es nur dem Informatiker hilft, das Handwerkszeug besser zu verstehen. Manches findet sich auch in den angesprochenen Büchern nicht, weil es, wie etwa die ‘conditional disjunction’ von CHURCH, erst durch die Informatik eine Wendung bekam, die es erwähnenswert macht, oder weil es sich, wie etwa die Händler-Diagramme, zuerst anderswo entwickelte, beispielsweise in der Codierungstheorie.

Überhaupt sind Gegenstände, die sich, wie die Schaltlogik, zunächst terminologisch und methodisch außerhalb der Aussagenlogik bewegten, systematisch einbezogen worden, wo immer es möglich war.

Etwas außerhalb der traditionellen Aussagenlogik liegt auch das für die Programmiersprachen so wichtige Gebiet der dyadischen Fallunterscheidungen – das sind heterogene ternäre Operationen der Universellen Algebra, den Diskriminatoren verwandt.

Der Aufbau des Buches bereitet insbesondere den Anschluß zur Prädikatenlogik didaktisch vor. Die Resolventenmethode wird in der Beschränkung auf die Aussagenlogik für den Anfänger leichter faßlich; daß dann in der Prädikatenlogik manches wiederholt wird, ist kein pädagogischer Mangel und kann nur den stören, der es auf minimalen Papierverbrauch anlegt. Durch die Verwendung von Pfeildiagrammen wird ein rascher Überblick über den Aufbau von Beweisen ermöglicht.

Den Schluß bilden modale Aussagenlogiken. In diesem für die Informatik wichtigen Gebiet sind auch unter Beschränkung auf die Aussagenlogik noch manche Dinge im Fluß; gebracht wird nur ein Ausschnitt, der dem handwerklichen Umgang dienen soll.

In reichlicher Zahl sind Übungsaufgaben eingestreut. Sie sind mehr als das: Sie greifen häufig Gedanken auf, die im Text nur nebenbei erwähnt sind, und stellen Querbezüge her. Die Lösungshinweise am Ende des Buches bieten gelegentlich Überraschungen. Einige wenige schwierige oder langwierige Aufgaben sind durch einen Stern gekennzeichnet.

Für wertvolle Hinweise, Ratschläge und Korrekturen danken wir einer ganzen Reihe von Freunden, Kollegen und Mitarbeitern, insbesondere aber den Professoren Helmut Schwichtenberg und Walter Dosch. Herr Dipl.-Math. Wolfgang Heinle unterstützte uns mit neuen Ideen, scharfem Blick und unermüdlicher Geduld. Bei der  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Aufbereitung war Herr Dr. Thomas Ströhlein eine unschätzbare Hilfe.

# INHALTSVERZEICHNIS

|                      |   |
|----------------------|---|
| Einleitung . . . . . | 1 |
|----------------------|---|

## KAPITEL I. NATÜRLICHES BEGRIFFSFELD

|   |    |
|---|----|
| 1. Aussagen und Aussagenverbindungen . . . . .                    | 2  |
| 1.1 Zweiwertiger Aussagenraum . . . . .                           | 2  |
| 1.2 Aussagenverbindungen . . . . .                                | 3  |
| 1.3 Extensionalität der Aussagenlogik . . . . .                   | 4  |
| 2. Aussageformen . . . . .  | 5  |
| 2.1 Zeichen . . . . .   | 5  |
| 2.2 Aussagenlogische Grundfunktionen . . . . .                    | 6  |
| 2.3 Aussagekonstanten . . . . .                                   | 7  |
| 3. Syntax der Aussageformen . . . . .                             | 8  |
| 3.1 Kontextfreie Grammatik . . . . .                              | 8  |
| 3.2 Algorithmen zur Erkennung von Aussageformen . . . . .         | 12 |
| 3.3 Induktive Beweise über den Aufbau von Aussageformen . . . . . | 13 |
| 3.4 Vielfachkonjunktion, Vielfachadjunktion . . . . .             | 14 |
| 3.5 Gebundene Bezeichner . . . . .                                | 15 |
| 3.6 Syntaktische Identitäten . . . . .                            | 16 |

## KAPITEL II. WERTVERLAUF

|   |    |
|---|----|
| 4. Tautologien und erfüllbare Aussageformen . . . . . | 18 |
| 4.1 Bewertung von Aussageformen . . . . .             | 18 |
| 4.2 Tautologie und Kontradiktion . . . . .            | 23 |
| 4.3 Identifizierung von Unbestimmten . . . . .        | 25 |
| 4.4 Hauptregeln . . . . .                             | 26 |
| 4.5 Einsetzungsregel . . . . .                        | 27 |
| 4.6 Formgesetze . . . . .                             | 29 |
| 5. Äquivalenz und Ordnung von Aussageformen . . . . . | 29 |
| 5.1 Wertverlaufsinklusion . . . . .                   | 29 |
| 5.2 Die Stärker-Regel für Implikationen . . . . .     | 31 |

|   |    |
|---|----|
| 5.3 Wertverlaufsgleichheit . . . . .                      | 32 |
| 5.4 Die Gleichstark-Regel für Biimplikationen . . . . .   | 33 |
| 5.5 Wertverlaufsgleichheit in Teilsprachen . . . . .      | 34 |
| 5.6 Implikation und Biimplikation, Anreicherung . . . . . | 38 |
| 5.7 Verträglichkeit . . . . .                             | 38 |
| 6. Die selbständige Rolle der Subjunktion . . . . .       | 39 |
| 6.1 Subjunktion als Umkehroperation . . . . .             | 39 |
| 6.2 Schranken . . . . .                                   | 40 |
| 6.3 Die Stärkerrelation als Verbandsordnung . . . . .     | 41 |
| 6.4 Interpolation . . . . .                               | 44 |

### KAPITEL III.

#### FUNKTIONALE UND ALGEBRAISCHE ASPEKTE

|   |    |
|---|----|
| 7. Aussagenlogische Funktionen . . . . .                                  | 46 |
| 7.1 Ersetzbarkeitstheorem . . . . .                                       | 46 |
| 7.2 Äquivalenzklassen . . . . .   | 49 |
| 7.3 Couffignal-Codierung und Würfel-Darstellungen . . . . .               | 53 |
| 7.4 Folgen-Codierung aller Klassen gleichstarker Aussageformen . . . . .  | 55 |
| 8. Repräsentantensysteme . . . . .  | 57 |
| 8.1 Repräsentationstheorem für aussagenlogische Funktionen . . . . .      | 57 |
| 8.2 Elimination von Grundoperationen: <b>C</b> und <b>E</b> . . . . .     | 59 |
| 8.3 Elimination von Grundoperationen: <b>A</b> oder <b>K</b> . . . . .    | 60 |
| 8.4 Zurückführung auf Subjunktion und Negation . . . . .                  | 61 |
| 8.5 Zurückführung auf Bisubjunktion und Negation . . . . .                | 62 |
| 8.6 $\bar{K}$ oder $\bar{A}$ als Basis . . . . .                          | 62 |
| 8.7 Dreistellige Operationen . . . . .                                    | 63 |
| 8.8 Dualität . . . . .  | 64 |
| 8.9 Minimale Sprachbasen . . . . .  | 65 |
| 9. Algebra der Aussageformen . . . . .                                    | 70 |
| 9.1 Induzierte Operationen auf Aussageformen . . . . .                    | 70 |
| 9.2 Der Boolesche Verband der Aussageformen . . . . .                     | 70 |
| 9.3 Die Gruppe und der Boolesche Ring der Aussageformen . . . . .         | 72 |
| 9.4 Andere algebraische Strukturen von Aussageformen . . . . .            | 73 |
| 9.5 Mengen als Modelle des Booleschen Verbands . . . . .                  | 75 |
| 9.6 Rechnen unter Verwendung der Couffignal-Codierung . . . . .           | 78 |
| 10. Programmiersprachen: Fallunterscheidungskalkül . . . . .              | 80 |
| 10.1 Vereinfachungen . . . . .  | 81 |
| 10.2 Grundgesetze über dyadische Fallunterscheidungen . . . . .           | 82 |
| 10.3 Die dreistellige Operation <b>B</b> als Fallunterscheidung . . . . . | 85 |
| 10.4 Sequentielle und bewachte Fallunterscheidungen . . . . .             | 85 |
| 10.5 Übergang von sequentieller zu bewachter Fallunterscheidung . . . . . | 86 |
| 10.6 Übergang von bewachter zu sequentieller Fallunterscheidung . . . . . | 86 |

**KAPITEL IV. FORMALE REDUKTIONEN**

|   |     |
|---|-----|
| 11. Auswertung und Teilauswertung „von außen“ . . . . .                 | 88  |
| 11.1 Zurückgestellte Operationen . . . . .                              | 89  |
| 11.2 Teilauswertung . . . . .   | 89  |
| 11.3 Quines Entscheidungsalgorithmus für Tautologien . . . . .          | 90  |
| 12. Normalformen . . . . .  | 93  |
| 12.1 Aussagenlogische Verneinungstechnik . . . . .                      | 93  |
| 12.2 Verneinungstechnische Normalform: <b>MAND</b> -Bäume . . . . .     | 94  |
| 12.3 Verneinungstechnische Normalform: Kontaktschaltungen . . . . .     | 95  |
| 12.4 Prämissen-Normalform . . . . .                                     | 99  |
| 12.5 Prämissen-Normalform: Entscheidungsbäume und -netze . . . . .      | 101 |
| 13. Adjunktive und konjunktive Normalformen . . . . .                   | 108 |
| 13.1 Adjunktive Normalform . . . . .                                    | 108 |
| 13.2 Konjunktive Normalform . . . . .                                   | 109 |
| 13.3 Bereinigte Normalformen . . . . .                                  | 110 |
| 13.4 Klauseln und Klauselmengen . . . . .                               | 110 |
| 13.5 Abschließung . . . . .   | 112 |
| 13.6 Beths Entscheidungsalgorithmus für Tautologien . . . . .           | 114 |
| 13.7 Quines Algorithmus für adjunktive Normalformen . . . . .           | 117 |
| 13.8 Anwendung auf Diodennetze und <b>NOR</b> -Schaltungen . . . . .    | 117 |
| 14. Kanonische Normalformen . . . . .                                   | 119 |
| 14.1 Adjunktive Boolesche Normalform . . . . .                          | 119 |
| 14.2 Das Normalformtheorem von Boole . . . . .                          | 120 |
| 14.3 Nochmals: Nachweis der Tautologieeigenschaft . . . . .             | 120 |
| 14.4 Konjunktive Boolesche Normalform . . . . .                         | 121 |
| 14.5 Übergang zwischen den kanonischen Normalformen . . . . .           | 122 |
| 14.6 Die kanonische Prämissen-Normalform . . . . .                      | 122 |
| 14.7 Die kanonische Ring-Normalform . . . . .                           | 123 |
| 15. Die Resolventenmethode . . . . .                                    | 125 |
| 15.1 Entscheidung einer Tautologie . . . . .                            | 125 |
| 15.2 Der Schichtenalgorithmus und der Eliminationsalgorithmus . . . . . | 126 |
| 15.3 Die duale Methode: Pfeilgerüste . . . . .                          | 130 |
| 15.4 Minimale Normalformen . . . . .                                    | 134 |
| 15.5 Minimierung einer Kanonischen Normalform . . . . .                 | 137 |
| 16. Die Methode des Widerspruchs . . . . .                              | 140 |

**KAPITEL V. FORMALE ABLEITUNGEN**

|  |     |
|--|-----|
| 17. Gewinnung von Schlußregeln . . . . .                   | 142 |
| 17.1 Schlußregeln für Tautologien . . . . .                | 142 |
| 17.2 Schlußregeln für Folgerungen . . . . .                | 143 |
| 17.3 Linksstabiler Beweis von Folgerungen . . . . .        | 146 |
| 17.4 Ein formales relationentheoretisches System . . . . . | 147 |
| 17.5 Technik der formalen Ableitung . . . . .              | 148 |



|  |     |
|--|-----|
| 18. Ableitungssysteme für Tautologien . . . . .            | 149 |
| 18.1 Das klassische Ableitungssystem . . . . .             | 150 |
| 18.2 Durchführung von Ableitungen . . . . .                | 153 |
| 18.3 Vollständigkeit . . . . .                             | 155 |
| 18.4 Formalsprachlicher Aspekt . . . . .                   | 155 |
| 18.5 Varianten des klassischen Ableitungssystems . . . . . | 156 |
| 18.6 Intuitionistische Aussagenlogik . . . . .             | 157 |
| 19. Ableitungssysteme für Folgerungen . . . . .            | 160 |
| 19.1 Das Gentzensche Ableitungssystem . . . . .            | 160 |
| 19.2 Monotoniesatz . . . . .                               | 161 |
| 19.3 Deduktionssatz . . . . .                              | 163 |
| 19.4 Vollständigkeit . . . . .                             | 163 |
| 20. Kompaktheit . . . . .                                  | 164 |
| 20.1 Kompaktheitssatz für die Erfüllbarkeit . . . . .      | 164 |
| 20.2 Kompaktheitssatz für Folgerungen . . . . .            | 165 |
| 20.3 Dualer Kompaktheitssatz . . . . .                     | 165 |

## KAPITEL VI. MODALE AUSSAGENLOGIKEN

|  |     |
|--|-----|
| 21. Die Sprache der Modallogiken . . . . .                             | 167 |
| 21.1 Dualität der modalen Junktoren, minimale Modallogik $K$ . . . . . | 167 |
| 21.2 Deontische und alethische Modallogiken . . . . .                  | 171 |
| 21.3 Temporale und existentielle Modallogiken . . . . .                | 173 |
| 21.4 Zusammenhang der modalen Logiken . . . . .                        | 176 |
| 22. Semantik modaler Logiken . . . . .                                 | 176 |
| 22.1 Kripke-Strukturen . . . . .                                       | 176 |
| 22.2 Omega-Modell, temporale Modallogiken $S4.4$ und $Grz$ . . . . .   | 180 |
| 22.3 Präordnung und Äquivalenz von modalen Aussageformen . . . . .     | 182 |
| 22.4 Entscheidungsalgorithmen für modale Aussageformen . . . . .       | 183 |
| 22.5 Ableitungssysteme für Modallogiken . . . . .                      | 184 |
| 23. Dimodale Logiken . . . . .   | 184 |
| 23.1 Die Axiome von McTaggart und Prior . . . . .                      | 184 |
| 23.2 Spezielle dimodale Logiken . . . . .                              | 185 |
| 24. Multimodale Logiken . . . . .                                      | 188 |
| 24.1 Modale Schritt-Logiken . . . . .                                  | 188 |
| 24.2 Kripke-Strukturen mit Hüllen . . . . .                            | 191 |
| 24.3 Kripke-Strukturen der Schritt-Logiken . . . . .                   | 195 |
| Hinweise zur Lösung der Aufgaben . . . . .                             | 197 |
| Aussagenlogische Operationen . . . . .                                 | 205 |
| Tautologien . . . . .  | 206 |
| Schlußregeln für Tautologien . . . . .                                 | 208 |
| Schlußregeln für Folgerungen . . . . .                                 | 210 |
| Modallogische Regeln und Gesetze . . . . .                             | 211 |
| Literatur und Quellen . . . . .  | 213 |
| Namen- und Sachverzeichnis . . . . .                                   | 215 |