



Paul Bachmann

Das Fermatproblem

in seiner bisherigen Entwicklung

Reprint

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York 1976

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1976

ISBN-13: 978-3-540-07660-5 e-ISBN-13: 978-3-642-81025-1

DOI: 10.1007/ 978-3-642-81025-1

**Lizenzausgabe mit freundlicher Genehmigung
des Verlages Walter de Gruyter & Co. Berlin New York**

Herstellung: fotokop wilhelm weihert kg Darmstadt

Das Fermatproblem

in seiner bisherigen Entwicklung

dargestellt von

Prof. Dr. Paul Bachmann



Berlin und Leipzig 1919

**Vereinigung wissenschaftlicher Verleger
Walter de Gruyter & Co.**

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung :: J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung :: Georg Reimer :: Karl J. Trübner :: Veit & Comp.

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten

FELIX KLEIN

zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum

in Verehrung gewidmet

Vorwort

Der Gegenstand dieses Werkes hat in neuer Zeit, nicht eben aus den lautersten Beweggründen, in weiten Kreisen großen Anteil erweckt, hat aber auch für den ernsten Forscher ungewöhnlich bedeutendes geschichtliches wie wissenschaftliches Interesse. Der Verfasser hofft daher, daß sein Buch freundliche Aufnahme finden werde. Er schrieb es in der schmerzlichsten Zeit, die Deutschland jemals erlebte, zur eigenen Stärkung, zum Trotz wider den Feind, zu einem Zeichen, daß deutsche Wissenschaft seinem rachsüchtigen Vernichtungswillen unbezwinglich widersteht. Ist doch gerade in der Zahlentheorie die Vorherrschaft Deutschlands unbestritten über alle Länder der Welt; und sie hat sich auch an dem Probleme bewährt, dem diese Blätter gewidmet sind, und dessen wichtigste Fortschritte deutschen Forschern zu danken sind. So möge denn dies Büchlein, wie es dem Verfasser zum Troste gedient, dem deutschen Leser gleichermaßen zur Freude, der Wissenschaft selber aber, wenn möglich, zur Förderung gereichen!

Weimar, November 1918.

Inhaltsverzeichnis

		Seite
	Einleitung	1
Nr. 1.	Fermats Theorem. Die descente infinie	2
„ 2.	Beispiel von Fermat; nach Legendres Darstellung	4
„ 3.	Unmöglichkeit der Gleichungen $x^4 \pm y^4 = z^2$	6
„ 4.	Folgerungen. Unmöglichkeit der Gleichung $x^3 + 1 = q^2$. Die Gleichung $x^{2n} + y^{2n} = z^2$	8
„ 5.	Reduktion des Fermatschen Theorems auf die Gleichung $x^n + y^n + z^n = 0$. Abelsche Formeln; Fall I und II	12
„ 6.	Gemeinsame Grundlage der Beweise für $p = 3$ und $p = 5$	17
„ 7.	Unmöglichkeit der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$, nach Euler und Legendre	19
„ 8.	Unmöglichkeit der Gleichung $x^3 + y^3 = 2z^3$, und Folgerungen	22
„ 8a.	Die Gleichung $x^5 + y^5 = A \cdot z^5$, nach Legendre	24
„ 9.	Unmöglichkeit der Gleichung $x^5 + y^5 = z^5$, nach Dirichlet. Die Gleichung $x^5 + y^5 = A z^5$. Die Gleichung $x^{14} + y^{14} = z^{14}$	26
„ 10.	Neue Grundlage der Untersuchung. Formeln für $(x + y + z)^p - x^p - y^p - z^p$ und $(x + y)^p - x^p - y^p$. Bemerkung von Cauchy	29
„ 11 und 12.	Ein zweiter Ausdruck für $(x + y)^p - x^p - y^p$	32
„ 13.	Anderer Ausdruck für $(x + y + z)^p - x^p - y^p - z^p$, und Folgerungen	35
„ 14 und 15.	Die Ausdrücke $y^2 + yz + z^2$, $x^2 - yz$ und ihre analog gebildeten, ihr größter gemeinsamer Theiler	38
„ 16.	Die Wendtschen Formeln, insbesondere $u^p + u'^p + u''^p = 2puu'u''$. I'	44
„ 17.	Formeln für den Rest von $\frac{2^p - 2}{p}$, $\frac{3^p - 3}{p} \pmod{p}$	47
„ 18.	Neue Grundlage der Betrachtung. Die Kongruenz $x^p + y^p + z^p \equiv 0 \pmod{p}$, und Folgerungen	53
„ 19.	Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung $x^p + y^p + z^p = 0$ im Falle I.	56
„ 20.	Die Kongruenz $x^p + y^p + z^p \equiv 0 \pmod{\pi}$ ($\pi = 2hp + 1$). Legendres Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $x^p + y^p + z^p = 0$ im Falle I. Andere Formulierung durch Wendt	60
„ 21.	Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung im Falle II, nach Wendt	64

	Seite
Nr. 22. Sätze von Legendre über ihre Unmöglichkeit im Falle I . . .	68
„ 23 und 24. Dicksons bezügliche Untersuchungen	70
„ 25 und 26. Dicksons Beweis, daß die Anzahl der Primzahlen $\pi = 2kp + 1$, für welche $x^p + y^p + z^p \equiv 0 \pmod{\pi}$ in Zahlen, prim zu π , unmöglich ist, nur endlich ist	76
„ 27. Beweis von J. Schur, Hilfssatz aus der Kombinationslehre . .	83
„ 28–31. Hurwitz' bezügliche Untersuchung der allgemeineren Kon- gruenz $ax^p + by^p + cz^p \equiv 0 \pmod{\pi}$	86
„ 32. Kummers neue Behandlung und Verallgemeinerung des Fermat- problems	95
„ 33. Grundbetrachtungen über Zahlkörper und ihre Ideale . . .	97
„ 34. Gauss' Beweis für die Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 + z^3 = 0$. .	98
„ 35. Hilfsbetrachtungen aus der Theorie des Kreisteilungskörpers . .	101
„ 36 und 37. Kummers Beweis des verallgemeinerten Fermat- schen Theorems für reguläre Primzahlexponenten	104
„ 38 und 39. Herleitung der Kummerschen Kongruenzbedingungen für die Fermatsche Gleichung im Falle I	111
„ 40 und 41. Die Funktionen $P_i(x, y)$ oder $P_i(t)$. Sätze von Miri- manoff und Kummer	117
„ 42. Mirimanoffs Funktionen $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$	123
„ 43. Seine Umformung der Kummerschen Kongruenzbedingungen .	126
„ 44. Das Wieferichsche Kriterium $\frac{2^p - 2}{p} \equiv 0 \pmod{p}$; bezüg- liche Bemerkungen von Mirimanoff und Frobenius	129
„ 45. Ein Satz über die Wurzeln von $\varphi_{p-1}(t) = 0$	136
„ 46. Mirimanoffs Verallgemeinerung der Untersuchungen von Wieferich, und sein Kriterium $\frac{3^p - 3}{p} \equiv 0 \pmod{p}$	137
„ 47 und 48. Vereinfachung und Fortsetzung der Untersuchungen von Mirimanoff durch Frobenius. Weitere Kriterien von Frobenius und Vandiver	143
„ 49. Neue Begründung solcher Kriterien durch Furtwängler . . .	150
„ 50. Furtwänglers neue Formulierung der Kummerschen Kon- gruenzbedingungen. Untersuchungen von Bernstein und von Hecke . . . ,	154
„ 51. Maillets Verallgemeinerungen des Fermatproblems, Studien über die Gleichung $x^p + y^p = C \cdot z^p$	156
„ 52. Rückblick und Ausschau. Fueters Problemstellung	158
Bemerkung zu Nr. 8a	160