Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 100

A Series of Modern Surveys in Mathematics

Hans Petersson

Modulfunktionen und quadratische Formen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1982

Prof. Dr. Dr. h. c. Hans Petersson
Ochtrupweg 42
D-4400 Münster

Gedruckt mit Unterstützung der Gesellschaft zur Förderung der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster

ISBN-13:978-3-642-68621-4 e-ISBN-13:978-3-642-68620-7
DOI: 10.1007/978-3-642-68620-7

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Petersson, Hans: Modulfuktionen und quadratische Formen / Hans Petersson. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1982.
(Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; 100)
ISBN-13:978-3-642-68621-4

NE: GT

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1982

2141/3140-543210

Vorwort

Seit langem ist bekannt, daß man durch Anwendung der Modulfunktionen einer komplexen Variablen Sätze über die Darstellungsanzahlen natürlicher Zahlen durch positiv-definite ganzzahlige quadratische Formen beweisen kann. Die erzeugende Fourier-Reihe der Darstellungsanzahlen ist eine Thetareihe und damit eine ganze Modulform. Über diese gilt ein Reduktionstheorem, das besagt, daß sich jede solche durch ein geeignetes lineares Aggregat Eisensteinscher Reihen auf eine ganze Spitzenform der gleichen Formenklasse additiv reduzieren läßt.

Im wesentlichen nach diesem besonders von E. Hecke herausgestellten Schema kann alles abgeleitet werden, was an konkreten Resultaten zum genannten Thema vorliegt. Die Resultate sind im strengen Sinne Analoga der berühmten Formel von C. G. J. Jacobi für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen. Wir bezeichnen im folgenden diese Analoga als Identitäten Jacobischer Art. Der vorliegende Bericht besteht aus lauter Beispielen für die Anwendung des obigen Verfahrens auf den Beweis solcher Identitäten. Es entstehen deren nicht nur endlich viele. Es werden auch Serien unendlich vieler Probleme der Bestimmung von Darstellungsanzahlen durch quadratische Formen aufgewiesen, deren Lösung auf Identitäten Jacobischer Art mit zunächst unbestimmten Koeffizienten führt. Für diese sind die Lösungen eines linearen Gleichungssystems einzusetzen, dessen eindeutige Lösbarkeit von vornherein feststeht.

Die entscheidende Forderung, die an die formale Struktur der Identitäten Jacobischer Art gestellt wird, besagt, daß diese vollständig explizit und finit sein sollen. Für die beteiligten ganzen Spitzenformen ergeben sich in Übereinstimmung mit dieser Vorschrift Darstellungen als Potenzprodukte (mit natürlichen Zahlen als Exponenten) von einfachen und binären Thetareihen. Dabei erweisen sich nichttriviale Theta-Relationen sehr oft als unentbehrliches Hilfsmittel. Sie beruhen auf der Divisorentheorie der Modulformen und damit auf dem in der vorliegenden Untersuchung dauernd angewendeten Transformations-Apparat (insbesondere den Multiplikatorsystemen) der Modulformen halbzahligen Grades ($-\frac{1}{2}$ und $-\frac{3}{2}$); es ist

$$\text{Grad} = \text{Dimension} = \text{minus Gewicht}.$$

Die überwiegend verwendeten Eisenstein-Reihen sind zwar solche ganzzahligen Grades, nehmen aber bei Transformation durch Modulmatrizen der betreffenden Untergruppe stets auch Multiplikatoren des Betrages 1 auf, die nicht dem Hauptcharakter entsprechen. Dies bedingt starke Abweichungen gegenüber der klassischen Theorie von E. Hecke, die völlig auf Hauptkongruenzgruppen und den Hauptcharakter zugeschnitten ist. Die entsprechenden Formenklassen sind wegen der mit der Stufe steil ansteigenden Werte für die Anzahlen der Spitzenbahnen und die Geschlechter zur Lösung von Aufgaben der oben angedeuteten Art in den weitaus meisten Fällen ungeeignet. Andererseits geben darüber, inwieweit für die Fourier-Koeffizienten Eisensteinscher Reihen das Postulat expliziter und finiter Darstellung realisiert werden kann, die Formeln von § 20 Auskunft; es handelt sich hier um Modulformen halbzahligen Grades ($-5/2$ und $-7/2$).

Fragen der Asymptotik treten in diesem Bericht fast in den Hintergrund. Eine gewisse natürliche asymptotische Gliederung ergibt sich aus den Abschätzungen der Fourier-Koeffizienten der ganzen Spitzenformen. Diese liefern tiefliegende asymptotische Aussagen, sobald es gelingt, die Fourier-Koeffizienten des linearen Kompositums Eisensteinscher Reihen, welche im Reduktionstheorem erscheinen, nicht-trivial nach unten abzuschätzen.

Im Gegensatz zur Asymptotik wird auf die numerische Berechenbarkeit des Resultat-Ausdrucks der verwendeten Methode der größte Wert gelegt. In allen vorliegenden Fällen gelang es, die numerische Übereinstimmung der beiden Seiten der Identität Jacobischer Art bis zum dreifachen Wert einer gewissen (wohlbekannten) Identitätsschranke (für die durch die quadratische Form darzustellende Zahl) zu bestätigen. Es sei hervorgehoben, daß dies lediglich in einigen der erwähnten Fälle halbzahligen Grades von § 20 den Gebrauch von Rechengeräten erforderte.

Im Hinblick auf die Eindeutigkeit der additiven Zerlegung der ganzen Modulformen nach dem Reduktionstheorem werden im Anhang G die Grundzüge der metrischen Verknüpfung ganzer Modulformen kurz entwickelt. Die genannte Eigenschaft ergibt sich unmittelbar aus der Orthogonalität der Eisenstein-Reihen zu den ganzen Spitzenformen. Diese ist damit zugleich eine wesentliche Eigenschaft der Identitäten Jacobischer Art.

Im übrigen sind diese Identitäten, wie sie hier auftreten, und mit ihnen zahllose weitere, die nach der gleichen Methode bewiesen werden können, sämtlich Aussagen über Thetareihen und gehören also im engsten Sinne zu deren Anwendungen. Über dieses Thema (Anwendungen der Thetafunktionen) sollte ein Artikel in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften berichten, der auf Wunsch von E. Hecke in den dreißiger Jahren geplant war und den zu schreiben der Verfasser übernommen hatte. Nachdem das Projekt – nicht zuletzt wegen der Schwierigkeit der stofflichen Abgrenzung – aufgegeben werden mußte, soll nun die vorliegende Darstellung zum Verständnis wenigstens dessen beitragen, was Thetareihen in der Theorie der quadratischen Formen zu leisten vermögen.

Die vorliegende Darstellung ist im Laufe mehrerer Jahre entstanden; es ergab sich schließlich ein nicht unkompliziertes Manuskript, das neben kleinen Inkonsequenzen der Bezeichnung auch typographische Schwierigkeiten darbot. Die Inkonsequenzen der Bezeichnung habe ich, da sie logisch belanglos sind, nicht geändert, um Druckfehlern vorzubeugen. Den finanziellen Ausgleich typographischer Schwierigkeiten hat die Gesellschaft zur Förderung der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster übernommen. Ihr kommt damit ein wesentliches Verdienst am Erscheinen dieses Buches zu. Dem Verlag und der Druckerei habe ich für die außerordentliche Mühe, die beide aufgewendet haben, um einen hochqualifizierten Buchtext herzustellen, nachdrücklichst zu danken. Von der Seite hochverehrter Kollegen wurde mir mancher gute Rat, besonders in technischer Hinsicht, gespendet. Überaus wertvoll war in dieser Hinsicht, vor allem bei den Korrekturen, die Hilfe meiner Frau, ohne die manche besonders mühsame Arbeit mindestens die doppelte Zeit in Anspruch genommen hätte.

Ihr ist dieses Buch gewidmet.

Münster (Westf.), im September 1982

Hans Petersson

Inhaltsverzeichnis

Im Text findet sich vor jedem Paragraphen eine ausführlichere Inhaltsübersicht.