

Hochschultext



Konrad Stahl Norbert Schulz

Mathematische Optimierung und mikroökonomische Theorie

Mit 45 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1981

Professor Konrad Stahl, Ph. D.
Norbert Schulz, Ph. D.

Universität Dortmund, Abteilung Wirtschafts- u. Sozialwissenschaften
Lehrstuhl Wirtschaftstheorie, insbes. Stadtökonomie
Postfach 500500
D-4600 Dortmund

ISBN-13: 978-3-540-11141-2 e-ISBN-13: 978-3-642-68350-3
DOI: 10.1007/978-3-642-68350-3

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Stahl, Konrad:

Mathematische Optimierung und mikroökonomische Theorie/Konrad Stahl;
Norbert Schulz. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1981.

(Hochschultext)

ISBN-13: 978-3-540-11141-2

NE: Schulz, Norbert:

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Die Vergütungsansprüche des § 54, Abs. 2 UrhG werden durch die „Verwertungsgesellschaft Wort“, München, wahrgenommen.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1981

2142/3140-543210

Vorwort

Die mikroökonomische Theorie fußt in wesentlichen Teilen auf Optimierungskalkülen. Ein solches Kalkül wird zunächst im Rahmen der Gleichgewichts- bzw. der Ungleichgewichtstheorie für die Entscheidungen des einzelnen Wirtschaftsakteurs - des Haushalts oder des Unternehmens unterstellt; darüber hinaus wird es ausgiebig im Rahmen der Wohlfahrts- theorie verwandt, mit Hilfe derer man ja auch Aussagen für den optimalen Einsatz öffentlicher Instrumente zu gewinnen hofft.

In dem vorliegenden Text stellen wir das diesen mikroökonomischen Anwendungen typischerweise zugrunde liegende nicht-lineare Programmierungsmodell gemeinsam mit Grundelementen der Anwendungen selbst dar. Diese Vorgehensweise hat sich als sinnvoll erwiesen, weil unserer Erfahrung nach im Rahmen eines wirtschaftswissenschaftlichen Studiums mathematische Grundlagen ohne ausführliche Motivation durch Anwendungsbeispiele nicht erfolgreich vermittelt werden können.

Zugunsten einer solchen intensiven Verzahnung zwischen Theorie und Anwendungen beschränken wir uns auf eine ausführliche Darstellung des Grundmodells des nicht-linearen Programmierens bzw. dessen Anwendungen in der statischen deterministischen Mikrotheorie. Erweiterungen, z.B. unter Einbeziehung dynamischer oder stochastischer Aspekte, werden nur im Rahmen von Beispielen vorgenommen. Für alle diese Erweiterungen ist ohnehin ein Verständnis der hier behandelten Thematik notwendig.

Die Präsentation des nicht-linearen Programmierungsmodells in diesem Text dient in erster Linie dazu, die Vermittlung von Anwendungen in der mikroökonomischen Theorie zu erleichtern. Ziel dieser Theorie ist im gegebenen Zusammenhang die qualitative Charakterisierung optimaler Lösungen sowie die Sensitivitätsanalyse. Dementsprechend haben wir nicht versucht, das Programmierungsmodell in seiner allgemeinsten Form zu entwickeln, sondern wählten eine Darstellung mit Hilfe "schöner" Funktionen.

Es bleibt zu rechtfertigen, warum im vorliegenden Text andere wichtige Bereiche der mikroökonomischen Theorie, wie z.B. die Theorie von Märkten unter vollkommener oder unvollkommener Konkurrenz einschließlich

ihrer mathematischen Grundlagen unbehandelt bleiben. Der Grund hierfür liegt einerseits darin, daß eine vertiefte Behandlung dieser Themenbereiche zusätzlich zu den hier diskutierten Themen den Rahmen des Textes sprengen würde; andererseits sind die den ausgeschlossenen Themenbereichen zugrunde liegenden mathematischen Strukturen wesentlich unterschiedlich von denen, die im vorliegenden Text behandelt sind.

Der Text sollte in erster Linie Studenten der Wirtschaftswissenschaften zur Einführung in die qualitative Optimierungstheorie, andererseits jedoch wirtschaftstheoretisch interessierten Mathematikern zur Einführung in wirtschaftstheoretische Anwendungen dieser Theorie dienen. Wir haben deshalb den Text so zu entwickeln versucht, daß er von beiden Adressaten in den wesentlichen Teilen ohne Konsultation zusätzlicher Referenzen benutzt werden kann. Sollte uns dies wenigstens in Ansätzen gelungen sein, so ist dies in erster Linie auf kritische Anregungen unserer Studenten zurückzuführen, für die wir uns an dieser Stelle sehr herzlich bedanken möchten. Wir bedanken uns außerdem bei den Herren Kollegen Böhm, Schittko und Schweizer für ihre konstruktive Kritik an einer vorläufigen Fassung des Textes. Schließlich danken wir den Departments of Economics und Electrical Engineering and Computer Sciences der University of California, Berkeley, welche uns durch ihre Gastfreundschaft die Überarbeitung des Textes zu einem Vergnügen haben werden lassen, sowie Frau G. Türke für die Schreibaarbeiten und Herrn H. Böker und Herrn Z. Jakob für die Anfertigung der Abbildungen.

Ein abschließendes Wort zur Organisation des Buches:

Im ersten Kapitel definieren und motivieren wir das allgemeine Optimierungsproblem und legen den Rahmen fest, innerhalb dessen wir uns mit diesem Problem beschäftigen. In Kapitel II werden die mikroökonomischen Optimierungsprobleme aus der Haushaltstheorie, der Produktionstheorie und der Wohlfahrtstheorie einschließlich der ihnen üblicherweise zugrunde gelegten Annahmen definiert. Schließlich diskutieren wir Beispiele an, in denen wir Erweiterungen des statischen deterministischen Programmierungsmodells aufzeigen.

Die zentralen Kapitel des Buches III, IV und V werden jeweils mit motivierenden Beispielen eingeleitet. Danach präsentieren wir die mathematischen Resultate. Kleinere Beweise geben wir dabei direkt. (Umfangreiche Beweise sind zur besseren Lesbarkeit in einen Anhang (C) verlagert.) Im Anschluß daran werden in jedem Kapitel die haushaltstheoretischen, produktionstheoretischen und wohlfahrtstheoretischen Anwendungen

der mathematischen Theorie diskutiert. Es folgt eine entsprechende Diskussion der früher eingeführten Beispiele. Die an jedes Kapitel anschließenden Übungen dienen der Vertiefung, weniger der Ergänzung der jeweiligen Darstellungen.

In den Anhängen zum Text sind schließlich die Notation (A), die mathematischen Grundlagen (B) und die umfangreicheren Beweise (C) zusammengefaßt. Wir haben uns bemüht, alle für den Text relevanten Definitionen und Aussagen aus der Mathematik in Anhang B zusammenzustellen, um schnelles Nachschlagen möglich zu machen. Dieser Anhang ist jedoch in keinem Fall als Einführung in die entsprechenden Teile der Mathematik anzusehen. Andererseits geht die benötigte Mathematik kaum über den in den mathematischen Propädeutika üblicherweise vermittelten Stoff hinaus.

Im gesamten Text werden Sätze, Bemerkungen, Folgerungen etc. abschnittsweise durchnummeriert. Z.B. ist der erste in Kapitel III Abschnitt 2 enthaltene Satz mit "Satz 2.1" bezeichnet. Innerhalb eines Kapitels werden Querverweise ohne, zwischen Kapiteln mit Kapitelangabe vorgenommen. In Kapitel IV wird dann auf den o.g. Satz als "Satz III.2.1" verwiesen.

Abschließend wollen wir noch darauf hinweisen, daß sich unsere Literaturhinweise am Ende der Abschnitte auf die im Text bezuggenommenen Literaturstellen beschränken. Daher mag es angebracht erscheinen, wenn wir an dieser Stelle noch einige wenige allgemeine Literaturhinweise geben:

Zur Mikroökonomie:

Malinvaud, E. [1972], Lectures on Microeconomic Theory, Amsterdam: North-Holland

Schumann, J. [1971]: Grundzüge der mikroökonomischen Theorie, Heidelberg: Springer

Varian, H. [1978]: Microeconomic Analysis, New York: Norton

Zur Optimierung:

Luenberger, D. [1973]: Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Reading: Addison-Wesley

Takayama, A. [1974]: Mathematical Economics, Hinsdale: The Dryden Press

Inhaltsverzeichnis

<u>KAPITEL I. EINLEITUNG</u>	1
I.1 MATHEMATISCHE MODELLE IN DER VOLKSWIRTSCHAFTSLEHRE	1
I.2 MATHEMATISCHE OPTIMIERUNG UND WIRTSCHAFTSTHEORIE	2
I.3 DAS OPTIMIERUNGSPROBLEM	4
I.4 ÜBUNGEN	8
<u>KAPITEL II. EINIGE GRUNDBEGRIFFE DER MIKROÖKONOMISCHEN THEORIE</u>	11
II.1 GÜTER, AKTEURE	11
II.2 HAUSHALTSTHEORIE	12
II.2.1 Physische Konsummöglichkeiten	13
II.2.2 Präferenzen	14
II.2.3 Erstausrüstung	16
II.2.4 Optimierungsprobleme des Haushalts	17
II.2.5 Einige zusätzliche Definitionen	18
II.2.6 Häufig gebrauchte Annahmen zur Struktur der Präferenzen	20
II.2.7 Beispiele	25
II.2.8 Übungen	34
II.2.9 Literatur	36
II.3 PRODUKTIONSTHEORIE	37
II.3.1 Technologiemenge und allgemeine Produktionsfunktion	37
II.3.2 Partielle Technologiemengen	39
II.3.3 Optimierungsprobleme des Unternehmens	41
II.3.4 Einige zusätzliche Definitionen	43
II.3.5 Häufig gebrauchte Annahmen zur Struktur von Technologiemengen und Produktionsfunktionen	45
II.3.6 Technologiemenge und Produktionsfunktion von spezialisierten Unternehmen	52
II.3.7 Beispiele	55
II.3.8 Übungen	60
II.3.9 Literatur	60

II.4	WOHLFAHRTSTHEORIE	61
II.4.1	Mögliche Allokationen	61
II.4.2	Soziale Präferenzen	62
II.4.3	Erstausstattung und zulässige Allokationen	64
II.4.4	Pareto-Präferenzrelation und effiziente Allokationen	65
II.4.5	Wohlfahrtsfunktion und gesamtwirtschaftlich optimale Allokationen	70
II.4.6	Häufig gebrauchte Annahmen zur Struktur sozialer Präferenzen	72
II.4.7	Übungen	73
II.4.8	Literatur	74

KAPITEL III. EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT VON LÖSUNGEN ZU OPTIMIERUNGSPROBLEMEN 75

III.1	EXISTENZ VON LÖSUNGEN ZU OPTIMIERUNGSPROBLEMEN	76
III.1.1	Einführende Beispiele	76
III.1.2	Existenz von Lösungen: Theorie	78
III.1.3	Existenz von Lösungen: Anwendungen auf die Haushaltstheorie	78
III.1.4	Existenz von Lösungen: Anwendungen auf die Produktionstheorie	81
III.1.5	Existenz von Lösungen: Anwendungen auf die Wohlfahrts- theorie	84
III.1.6	Übungen	85
III.2	EINDEUTIGKEIT VON LÖSUNGEN ZU OPTIMIERUNGSPROBLEMEN	86
III.2.1	Ein einführendes Beispiel und Theorie	86
III.2.2	Eindeutigkeit von Lösungen: Anwendungen auf die Mikro- ökonomische Theorie	87
III.2.3	Übungen	88
III.3	MENGE DER VEKTOROPTIMA	89
III.3.1	Theorie	89
III.3.2	Anwendungen auf das Effizienzproblem	93
III.3.3	Übungen	95

KAPITEL IV. CHARAKTERISIERUNG VON LÖSUNGEN ZU OPTIMIERUNGSPROBLEMEN 96

IV.1	LAGRANGEFUNKTION UND KUHN-TUCKER-BEDINGUNGEN: EIN BEISPIEL	98
------	--	----

IV.2	THEORIE DER KUHN-TUCKER-BEDINGUNGEN	104
IV.2.1	Definitionen und Gegenbeispiele	104
IV.2.2	Charakterisierung von Optima durch die Kuhn-Tucker-Bedingungen	108
IV.2.3	Nichtnegativitäts-Bedingungen	114
IV.2.4	Lineare Optimierung und Dualität	117
IV.2.5	Klassisches Optimierungsproblem	120
IV.2.6	Bedingungen zweiter Ordnung	122
IV.2.7	Kuhn-Tucker-Bedingungen und Vektormaximierungsprobleme	124
IV.2.8	Übungen	126
IV.2.9	Literatur	127
IV.3	ANWENDUNGEN AUF DIE HAUSHALTSTHEORIE	128
IV.3.1	Nutzenmaximierung	128
IV.3.2	Ausgabenminimierung	132
IV.3.3	Beispiele	133
IV.3.4	Übungen	136
IV.3.5	Literatur	137
IV.4	ANWENDUNGEN AUF DIE PRODUKTIONSTHEORIE	138
IV.4.1	Gewinnmaximierung	138
IV.4.2	Kostenminimierung	140
IV.4.3	Duale Beziehungen in der Produktionstheorie	141
IV.4.4	Beispiele	145
IV.4.5	Übungen	147
IV.4.6	Literatur	148
IV.5	ANWENDUNGEN AUF DIE WOHLFAHRTSTHEORIE	149
IV.5.1	Wohlfahrtsmaximierung	149
IV.5.2	Pareto-effiziente Allokationen	151
IV.5.3	Wohlfahrtstheoretische Eigenschaften von Preisgleichgewichten	153
IV.5.4	Übungen	158
IV.5.5	Literatur	159
<u>KAPITEL V. SENSITIVITÄTSANALYSE</u>		160
V.1	SENSITIVITÄTSANALYSE: THEORIE	161
V.1.1	Stetigkeitsaussagen	162
V.1.2	Differenzierbarkeitsaussagen	166
V.1.3	Der Satz von der Einhüllenden	168

V.2	KOMPARATIVE STATIK IN DER HAUSHALTSTHEORIE	171
V.2.1	Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Nachfragefunktionen	171
V.2.2	Einige wichtige Beziehungen	173
V.2.3	Komparative Statik	175
V.2.4	Konsumentenrente	180
V.2.5	Beispiele	185
V.2.6	Übungen	187
V.2.7	Literatur	188
V.3	KOMPARATIVE STATIK IN DER PRODUKTIONSTHEORIE	189
V.3.1	Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Angebots- und Faktornachfragefunktionen	189
V.3.2	Einige wichtige Beziehungen in der Produktionstheorie spezialisierter Unternehmen	191
V.3.3	Komparative Statik	194
V.3.4	Beispiele	196
V.3.5	Übungen	198
V.3.6	Literatur	199
<u>ANHANG A</u>		200
A.1	NOTATION	200
A.2	LISTE DER VERWENDETEN ABKÜRZUNGEN	202
A.3	LISTE DER IN ÖKONOMISCHEN ANWENDUNGEN BENUTZTEN SYMBOLIK	203
A.4	LISTE DER IN ÖKONOMISCHEN ANWENDUNGEN BENUTZTEN ANNAHMEN	205
A.5	LISTE DER WICHTIGSTEN OPTIMIERUNGSPROBLEME DER MIKRO-ÖKONOMIE	206
<u>ANHANG B</u>		207
B.1	MENGEN UND FUNKTIONEN	207
B.2	LINEARE STRUKTUREN	208
B.2.1	Vektoren	208
B.2.2	Matrizen	209

B.2.3	Determinanten	211
B.2.4	Konvexe Mengen	212
	Literatur	213
B.3	ANALYSIS	214
B.3.1	Grundbegriffe der Topologie	214
B.3.2	Differentialrechnung	215
B.3.3	Konkave, konvexe und homogene Funktionen	218
B.3.4	Extremwerte	219
	Literatur	219
<u>ANHANG C: BEWEISE ZU DEN KAPITELN III - V</u>		220
C.1	Beweise zu Kapitel III	220
C.2	Beweise zu Kapitel IV	224
C.3	Beweise zu Kapitel V	229
Sachverzeichnis		233