



T. Deutler

Schätz- und Testverfahren
bei Normalverteilung
mit bekanntem Variationskoeffizienten

Mit 27 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1981

Dr. Tilmann Deutler
Akademischer Oberrat an der Fakultät für
Volkswirtschaftslehre und Statistik
der Universität Mannheim (WH), A 5
6800 Mannheim

ISBN-13: 978-3-540-10687-6 e-ISBN-13: 978-3-642-68032-8
DOI:10.1007/ 978-3-642-68032-8

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Deutler, Tilmann: Schätz- und Testverfahren bei Normalverteilung mit bekannten
Variationskoeffizienten / T. Deutler. - Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1981.

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Die Vergütungsansprüche des § 54, Abs. 2 UrhG werden durch die „Verwertungsgesellschaft Wort“, München, wahrgenommen.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1981

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen in Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Vorwort

Bei manchen technischen, biologischen oder ökonomischen Prozessen entstehen Familien normalverteilter Zufallsgrößen mit konstantem Variationskoeffizienten. Dieser ist in bestimmten Situationen bekannt. Das Schätz- und Testproblem bezüglich des Erwartungswertes, führt dann infolge der besonderen Modellstruktur (keine Exponentialfamilie, zweikomponentige minimal suffiziente Statistik), nicht zu trivialen Lösungen.

In der Literatur sind bislang fast ausschließlich Arbeiten zur Punktschätzung zu finden und nur wenige, teilweise unvollkommene Lösungsansätze zum Testproblem und zur Intervallschätzung. Ein wesentlicher Bestandteil der Arbeit ist daher die Entwicklung und der Vergleich von Testverfahren im Einstichprobenfall nach verschiedenen in der Testtheorie gängigen Methoden. Die hier vorliegende Monographie faßt nun die bereits bekannten und die hier neu erarbeiteten Schätz- und Testverfahren in einheitlicher Darstellung zusammen. Dadurch werden auch Querverbindungen und Vergleiche zwischen den Ergebnissen der meist unabhängig voneinander arbeitenden Autorengruppen hergestellt.

Die Verfahren sollen hier nicht nur rein formal-methodisch dargestellt werden, sondern es wird eine Integration von Theorie und Praxis intendiert: Bei der Auswahl der Verfahren, bei der Verfahrensdurchführung und beim Verfahrensvergleich werden daher neben theoretischen auch anwendungsorientierte Argumente berücksichtigt, gegenseitig abgewogen und insbesondere in ihren Auswirkungen auf die praktische Anwendung diskutiert. Daraus resultierend werden Empfehlungen für die Praxis gegeben.

Für alle untersuchten Verfahren sind die zum praktischen Einsatz benötigten Tabellen bzw. Algorithmen aus der Literatur zusammengestellt. Die damit berechneten zahlreichen Darstellungen der Operationscharakteristiken sollen dem Leser ein anschauliches Bild von den analytisch untersuchten Testeigenschaften und Testschärferelationen vermitteln.

Das Buch wendet sich einerseits an statistisch versierte "Praktiker" aus den Bereichen Technik, Biologie/Medizin oder Wirtschaftswissenschaften, für die das vorliegende Modell in einer Reihe von Anwendungssituationen praktisch relevant ist. Andererseits ist es auch für

"Statistiker" interessant, die sich mit Schätz- und Test-Theorie befassen; denn wegen der speziellen Modellstruktur lassen sich hier einige außergewöhnliche Effekte beobachten und diskutieren. Es zeigt sich nämlich hier einmal exemplarisch, welche Folgen das Fehlen günstiger Modellvoraussetzungen haben kann. Insoweit könnte das Buch auch didaktischen Zwecken innerhalb der Statistik dienen.

Zum Verständnis des Buches werden auf jeden Fall mehr als nur elementare Kenntnisse in Schätz- und Testtheorie vorausgesetzt. Für den mit den benötigten Begriffen weniger vertrauten Leser werden jedoch jeweils Hinweise auf bewährte Standardwerke gegeben, insbesondere auf Band II von "Advanced Theory of Statistics" von KENDALL/STUART (1961) und auf "Mathematical Statistics" von FERGUSON (1967).

Der Autor ist dankbar für jeden Hinweis auf Ergänzungen oder Verbesserungen und insbesondere auf weitere Anwendungsmöglichkeiten des Modells

Der Satz wurde von Frau B. Penner erstellt; Frau M.-L. Mandel zeichnete die Abbildungen. Ihnen gilt an dieser Stelle mein besonderer Dank.

Mannheim, im Oktober 1980

Tilman Deutler

Inhaltsangabe

In Abschnitt 1 werden die statistische Problemstellung, die Voraussetzungen und die daraus resultierenden Struktureigenschaften des statistischen Modells dargelegt. Da sich die bisher zu dieser Problemstellung veröffentlichten Arbeiten fast ausschließlich mit der Punktschätzung befassen, wird in Abschnitt 2 eine zusammenfassende und vergleichende Darstellung dieser Arbeit zur Punktschätzung gegeben. Über das reine Referieren hinaus wird schon vorbereitend erörtert, welche der Schätzfunktionen auch als Testgrößen geeignet sind. Nach Möglichkeit werden die zugehörigen Verteilungsfunktionen hergeleitet.

Darauf aufbauend entwickelt und diskutiert der Verfasser im zentralen Abschnitt 3 Testverfahren zum Einstichprobenproblem. Nach der Präzisierung des Testproblems wird zunächst der Likelihoodquotiententest für einfache Hypothesen und daraus resultierend eine Schar von Prüfgrößen für den Test von zusammengesetzten Hypothesen diskutiert. In dieser Schar ist auch die Prüfgröße des lokal besten Tests enthalten. Anschließend wird der Test mit der bedingt suffizienten Statistik und die Abhängigkeit der Testgüte von der Bedingung untersucht. Die weiteren Unterabschnitte befassen sich mit der Konstruktion von Testen aus den Komponenten der minimal suffizienten Statistik bzw. aus den in Abschnitt 2 erörterten Schätzfunktionen. Parallel zu den einzelnen Testverfahren wird jeweils die Intervallschätzung behandelt. Abschnitt 3 schließt mit einem zusammenfassenden Gütevergleich der dargestellten Verfahren und mit Empfehlungen für die Verfahrensauswahl.

In Abschnitt 4 werden Anwendungsbeispiele des Modells gegeben und die Anwendbarkeit des Modells diskutiert. Daran schließt sich ein kritischer Vergleich mit möglichen Alternativmodellen an: Anhand von Gamma- und Lognormalverteilung, die bei kleinen Variationskoeffizienten von der Normalverteilung praktisch schwer unterscheidbar sind wird gezeigt, wie stark sich Fehlspezifikationen in der Verteilungsannahme auf die Testschärfe auswirken können. Weiter werden Verfahren zur Überprüfung der Modellvoraussetzungen aus der Literatur zusammengestellt.

Abschnitt 5 gibt einen Überblick über weitere zum Teil noch offene Problemstellungen im Modell Normalverteilung mit bekanntem Variationskoeffizienten und einen Ausblick auf mögliche Modellerweiterungen.

VIII

Im Anhang sind wichtige Eigenschaften der vorkommenden Verteilungen zusammengestellt. Insbesondere werden aus der Literatur programmierte Algorithmen und Tabellen zitiert, die man zur Bestimmung von Verteilungsfunktionen und Schwellenwerten (Fraktilen) sowie zur Berechnung der Operationscharakteristiken benötigt.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. EINLEITUNG	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Voraussetzungen und allgemeine Struktureigenschaften	2
2. PUNKTSCHÄTZUNG	
2.1 Beurteilungskriterien und Eigenschaften von Schätzfunktionen	7
2.1.1 Verlustfunktion bzw. Risikofunktion; Rao-Cramer-Schranken	7
2.1.2 Bildung einer geeigneten Schätzfunktionenklasse	10
2.1.3 Schätzung von Funktionen des Erwartungswertes	14
2.2 Maximum-Likelihood-Schätzung	15
2.3 Methode der kleinsten Quadrate	17
2.4 χ^2 -Minimum-Methode	19
2.5 Momentenmethode	19
2.6 BLUE-Schätzung aus den Komponenten der minimal-suffizienten Statistik	29
2.7 Lineare Schätzungen aus den Order-Statistics	39
2.8 Äquivalente Schätzfunktion mit minimalem Risiko	43
2.9 Schätzung mit der bedingt suffizienten Statistik	47
2.10 Zusammenfassender Vergleich der Schätzfunktionen	53
3. EINSTICHPROBENTESTE	58
3.1 Präzisierung des Testproblems als Entscheidungsproblem	59
3.1.1 Hypothesen	59
3.1.2 Verlustfunktion	60
3.1.3 Bildung einer geeigneten Klasse von Tests bzw. von Teststatistiken	64
3.1.4 Intervallschätzung; Konstruktion von Vertrauensbereichen	66
3.2 Der Likelihood-Quotienten-Test	66
3.2.1 Einfache Hypothesen	66
3.2.2 Zusammengesetzte Hypothesen; Prüfgrößen-schar L_K	71
3.2.3 Eigenschaften der OC von L_K	76
3.2.4 Vertrauensbereiche	89

	Seite	
3.2.5	Approximationen	95
3.2.6	Testschärfevergleich von L_{κ} für $\kappa=0$; $\kappa=1$; $\kappa=\infty$	97
3.3	Der Test mit der bedingt suffizienten Statistik	105
3.4	Testverfahren mit der Prüfgröße \bar{X} und daraus abgeleiteter Prüfgrößen	116
3.4.1	Der arithmetische Mittelwert \bar{X} als Prüfgröße	116
3.4.2	Test mit der Statistik \bar{X}_+ von JOSHI/SATHE	124
3.4.3	Test mit der Prüfgröße \bar{X}^2	126
3.4.4	Testschärfevergleich für die Teste mit \bar{X} \bar{X}^2 und \bar{X}_+	129
3.5	Test mit der Stichprobenvarianz S^2	131
3.6	Teste simultan mit \bar{X} und S	134
3.6.1	Testkombination nach WILKINSON	135
3.6.2	Test mit BLUE-Schätzung aus \bar{X} und S	136
3.6.3	Der klassische t-Test	139
3.7	Zusammenfassender Vergleich der Testverfahren und Folgerungen für die Praxis	144
4.	ANWENDUNGEN UND ANWENDBARKEIT DES MODELLS	154
4.1	Anwendungsbeispiele	154
4.1.1	Meßverfahren mit konstanter relativer Genauigkeit	154
4.1.2	Wachstumsvorgang	157
4.2	Überprüfung der Modellvoraussetzungen	159
4.2.1	Normalitätsprüfung	160
4.2.2	Überprüfung der Konstanz des Variations- koeffizienten	161
4.2.3	Schätzung des Variationskoeffizienten	162
4.3	Modellkritik	163
4.3.1	Vergleich von Normal- und Gamma-Verteilung	164
4.3.2	Vergleich von Normal- und Log-Normal- Verteilung	173
5.	AUSBLICK	179
5.1	Weitere Problemstellungen im Modell $N(\mu; \gamma\mu)$ mit bekanntem γ	179
5.2	Modellerweiterungen	181
A	ANHANG	184
A 1	Normalverteilung $N(\mu; \sigma)$	184

	Seite
A 2 Logarithmische Normalverteilung $LN(\zeta; \tau)$	184
A 3 Gammaverteilung $G(\eta; \lambda)$ und zentrale χ^2_f -Verteilung	185
A 4 Nichtzentrale χ^2 -Verteilung	187
A 5 Nichtzentrale t-Verteilung	189
 LITERATURVERZEICHNIS	 191

Bedeutung häufig vorkommender Symbole

Symbol	Bedeutung
μ	Erwartungswert
σ	Standardabweichung
$\gamma := \sigma/\mu$	Variationskoeffizient
n	Stichprobenumfang
$\nu := n/\gamma^2$	fiktiver Stichprobenumfang
α	Signifikanzniveau
$\bar{X} = \sum X_i/n$	arithmetisches Mittel der Stichprobe
$S^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$	Stichprobenvarianz
$\Phi(\cdot)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
u_ϵ	Schwellenwert (Fraktile) der Standardnormalverteilung
$\stackrel{d}{=}$	"verteilt wie"
$\stackrel{\cdot}{=}$	"asymptotisch gleich"
$\stackrel{\cdot}{d}{=}$	"asymptotisch verteilt wie"