

Heidelberger Taschenbücher Band 187

Sammlung Informatik

Herausgegeben von F. L. Bauer, G. Goos und M. Paul



Eberhard Bergmann Helga Noll

**Mathematische Logik
mit
Informatik-Anwendungen**

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1977

Eberhard Bergmann Helga Noll
Technische Universität Berlin, Fachbereich Informatik
Informatik-Forschungsgruppen
Programmiersprachen und Compiler I
Computergestützte Informationssysteme

ISBN-13: 978-3-540-08202-6 e-ISBN-13: 978-3-642-66635-6
DOI: 10.1007/978-3-642-66635-6

Library of Congress Cataloging in Publication Data. Bergmann, Eberhard, 1941 -. Mathematische Logik mit Informatik-Anwendungen. (Heidelberger Taschenbücher; Bd. 187: Sammlung Informatik). Bibliography: p. Includes index. 1. Logic, Symbolic and mathematical. 2. Electronic data processing. I. Noll, Helga, 1936 -, joint author. II. Title. QA9.B45. 511'3. 77-3724.

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1977

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gesamtherstellung: Zehnersche Buchdruckerei, Speyer
2145/3140-543210

Vorwort

Dieses Buch ist aus Skripten der Autoren zu ihrer Vorlesung „Mathematische Logik (für Informatiker)“ entstanden. Diese sechsstündige Lehrveranstaltung, die seit dem Sommersemester 1974 jährlich an der Technischen Universität Berlin im Fachbereich Informatik abgehalten wird, will Informatik-Studenten etwa vom 4. Semester an mit Logik-Methoden vertraut machen und gleichzeitig einen Beitrag zur Mathematik-Ausbildung für Informatiker leisten. Dementsprechend handelt es sich um einen einführenden Text für „krasse“ Anfänger in der Logik, der mit elementaren Mathematik-Kenntnissen lesbar ist und an Informatik-Voraussetzungen nur einfachste Konzepte von Programmiersprachen benötigt. Anliegen des Buches, das sich gleichermaßen an **Mathematik-** und **Informatik-Studenten** wendet, ist es, einerseits eine mathematisch zufriedenstellende Darstellung der Anfangsgründe der Prädikatenlogik der ersten Stufe zu geben, andererseits aber auch Anwendungen dieser Logik innerhalb der Informatik einheitlich in die Logik-Darstellung einzubeziehen.

Der Versuch, ein Buch über Logik mit Informatik-Anwendungen zu schreiben, ist nicht ohne Probleme, da die Auswahl der Verbindungen von Logik und Informatik eine subjektive Entscheidung bleibt, so daß über den hier vorliegenden Text hinaus Raum für andere Berührungspunkte und für eine intensivere Gestaltung der hier im Text angeführten Anwendungen besteht. Man kann dabei z. B. an engere Verbindungen zur theoretischen Informatik denken oder an eine systematische Abhandlung der angesprochenen Anwendungsgebiete. Dieser Text will dazu anregen, Informatik und Logik so aufeinander zu beziehen, daß Logik als Hilfsmittel für die Informatik angesehen werden darf, d. h. als eine fruchtbare, Informatik-Ergebnisse hervorbringende Methode. Da unter Informatikern die Bedeutung von Mathematik als Hilfswissenschaft noch nicht genügend geklärt ist und bei weitem nicht klar ist, was als theoretische Informatik gelten kann, soll mit diesem Text nicht präjudiziert werden, daß Logik *das* Hilfsmittel der Informatik ist oder wird.

Der Text wurde nach folgenden Gesichtspunkten angelegt:

Die Stoffauswahl wurde dem Umfang nach so getroffen, daß die Bewältigung des gebotenen Materials nicht gänzlich außerhalb der Möglichkeiten einer sechsstündigen Lehrveranstaltung liegt.

Bei der Darstellung der Inhalte soll der Leser durch Motivierung der eingeführten und verwendeten Begriffe und Ergebnisse zum *selbständigen* Beweisen geführt werden. So ist z. B. der Paragraph 11 ein didaktisch gelenktes Nacherfinden des Vollständigkeitsbeweises.

Wir haben höchstens abzählbare Symbolmengen zugelassen und waren an Sätzen über überabzählbare Individuenbereiche nicht interessiert. Diese Vereinfachung, die angesichts einer Anwendung der Logik in der Informatik gerechtfertigt ist, befreit darüber hinaus die Beweise von Komplikationen, die für den Anfänger noch nicht förderlich sind.

Die konsequente Verwendung von metasprachlicher Symbolisierung (nicht Formalisierung) wurde mit Bedacht gewählt, weil sie es dem Ungeübten überhaupt erst ermöglicht, an bestimmten Stellen Beweise sicher zu führen, etwa beim Modellbegriff oder bei der logischen Folgerung, die umgangssprachlich anfangs nur sehr schwer zu bewältigen sind. Zur Symbolisierung ist durchgängig die Symbolik der Mengenlehre verwendet worden, so wie sie sich in den Mathematik-Darstellungen durchgesetzt hat. Zur besseren Lesbarkeit sind die in den Lehrsätzen ausgedrückten Inhalte meist auch verbal wiedergegeben.

Neben Übungsaufgaben, die im Text eingestreut sind, gibt es am Ende von Paragraphen (wenn nötig oder möglich) einen Block von Übungsaufgaben. Die Aufgaben sind zum größten Teil auch für das zur oben erwähnten Lehrveranstaltung gehörige Tutorium verwendet worden und dienen nicht dazu, tiefliegende und schwerwiegende logische Ideen und Erfindungen nachentdecken zu lassen, sondern sie wollen durch elementaren Umgang mit den vorher entwickelten Begriffen und Lehrsätzen den Leser zum Nachlesen bzw. Nachbereiten des Textes veranlassen und so sein logisches Wissen festigen und vertiefen helfen. Aus diesem Grunde konnte auch auf den Abdruck der Lösungen verzichtet werden. Die Übungsaufgaben (und die im Text verwendeten Beispiele) entstammen den verschiedensten Quellen, die nicht eigens dokumentiert wurden.

Übersicht über den Inhalt:

Der *erste* Teil des Textes gibt in vier Kapiteln eine stringente Darstellung der Prädikatenlogik der ersten Stufe bis zum Vollständigkeitsatz. Er orientiert sich in der Auswahl des Kalküls stark an den Büchern von G. Asser und J. Shoenfield. Nach kurzen Vorbemerkungen (Kapitel 1) wird anhand einfacher Programmiersprachen-Konzepte motivierend gezeigt, wie eine Sprache der Logik auszusehen hat (Kapitel 2). Danach wird dann in den Kapiteln 3 und 4 der Hauptteil, der mathematische Aufbau der Prädikatenlogik, dargestellt; er ist in seiner Stoffauswahl und seinen Begriffen standardmäßig, wobei zusätzlich der Zusammenhang von Logik-Ergebnissen und Ergebnissen der Theorie der Berechenbarkeit hergestellt wird. Außerdem wird eine für die theoretische Informatik schon klassische Anwendung behandelt, ein Beispiel aus dem Gebiet der sog. Programm-Verifikation (§ 12.5).

Der *zweite* Teil mit zwei Kapiteln gilt Informatik-Anwendungen der Prädikatenlogik: Die wichtigste der behandelten Anwendungen (Kapitel 5) ist den logischen Grundlagen des sog. maschinellen Beweisens (Resolventenprinzip) gewidmet. Dabei handelt es sich um eine Umformulierung der klassischen Logik-Kalküle, die ab etwa 1960 aus dem Wunsch entstand, Deduktionsprozesse vom Rechner ausführen zu lassen. Neben der Betrachtung der logischen Grundlagen wird Wert auf die Behandlung von daraus resultierenden Beweisverfahren und deren Anwendung gelegt. Das Kapitel 6 befaßt sich mit zwei Beispielen aus den Informatik-Gebieten Informationssysteme und Semantik von Programmiersprachen, an denen die Methode der Formalisierung (als eine der wichtigsten Methoden der Logik) deutlich werden soll.

Der *dritte* Teil will zweierlei bewirken: Erstens sollen die über den gesamten Text verteilten Andeutungen über größere philosophische Zusammenhänge, in denen Logik steht, explizit benannt werden, wobei auf das wichtigste Problem, die Frage nach der Geschichte der Logik, näher eingegangen wird. Zweitens enthalten Schlußbemerkungen einige Anregungen, welche Gebiete der Logik sich für ein Weiterstudium eignen, da das vorliegende Buch nur ein allererster Einstieg in die Logik sein soll.

Der *vierte* (technische) Teil enthält einen Anhang mit ausgesparten Beweisen, Bemerkungen zu weiterführender Literatur, eine Liste von häufig verwendeten Symbolen und ein Namen- und Sachverzeichnis.

Bei der Erstellung dieses Buches wurde uns mannigfache Hilfe zuteil: Prof. D. Siefkes hat die Veröffentlichung der Skripten als

Buch wesentlich unterstützt und durch kritische Durchsicht der Vorlagen sehr zu deren Verbesserung beigetragen. Mit Angehörigen und Kollegen der Informatik-Forschungsgruppe Programmiersprachen und Compiler I und der damaligen Informatik-Forschungsgruppe Systeme zur Informationsverwaltung konnten wir über einzelne Punkte fruchtbar diskutieren. Von Studenten und Tutoren des Fachbereichs Informatik ist konstruktive Kritik geübt worden. Bernhard Böhringer, Annette Gahn und Bernd Kohlberger haben das Manuskript gewissenhaft durchgesehen, und Frau Rühle hat sehr kompetent eine frühe Version des Textes geschrieben. Ohne unseren Kollegen Klaus Fleischmann wäre das Kapitel über *Probleme mit der Logik* in seiner jetzigen Form nicht zustande gekommen.

Ihnen allen gilt unser herzlicher Dank.

Berlin, im Dezember 1976

Eberhard Bergmann Helga Noll

Hinweise für den Leser

Der Gesamtstoff ist in *Kapitel* unterteilt, die ihrerseits in *Paragraphen* und weiter in *Abschnitte* gegliedert sind. Beispiele, Definitionen, Lemmata und Sätze sind innerhalb jedes Paragraphen durchnummeriert. Die zitierten Literaturstellen sind kapitelweise zusammengestellt. Kürzel in eckigen Klammern beziehen sich auf diese Literaturangaben.

Als Lesehilfe hat sich bewährt, unübersichtliche Klammersausdrücke mit Notizzettel und Bleistift zu enträtseln.

Beim ersten Durchgang durch den Logikteil ist es ratsam, die Abschnitte 10.3.5, 11.5, 11.6, die Beweise von Abschnitt 12.4 und den Abschnitt 12.5 zu überschlagen. § 9 und § 14 sind Durststrecken, die es zu überwinden gilt. Für eilige Leser: der technische Teil beginnt ab § 6.

Lesern, die nur am maschinellen Beweisen interessiert sind, empfehlen wir, sich vor der Lektüre des fünften Kapitels in etwa mit den Grundbegriffen Syntax, Semantik (§ 6); Erfüllbarkeit, Gültigkeit, Allgemeingültigkeit (§ 7); freie Variable, Substitution, Normalform (§ 9); Modell, Folgerung (Abschnitt 10.2); Ableitung (Abschnitt 10.3.1, 10.3.2) vertraut zu machen, ferner mit dem Inhalt des Vollständigkeitssatzes 11.19 und dessen Konsequenzen (Kompaktheitsatz für Modelle, Satz von der freien Interpretation, Abschnitt 11.4) und außerdem mit den Aussagen über die Semi-Entscheidbarkeit (Abschnitt 12.4).

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Vorbemerkungen	1
§ 1. Einleitung	1
§ 2. Verwendete Notation	2
Kapitel 2. Einführung und Motivation	4
§ 3. Programmiersprachen und elementare Konzepte der mathematischen Logik	4
§ 4. Umgangssprache und die Gestalt der Syntax einer mathematischen Logik	9
4.1. Exkurs: Satz – Aussage – Sachverhalt	10
4.2. Die Zerlegung von Sätzen der natürlichen Sprache in Teilsätze	12
4.3. Exkurs: Extension und Intension	14
4.4. Die Definition der extensionalen Junktoren	16
4.5. Die Feinstruktur von Aussagen	20
4.6. Schreibvarianten der Kalkülzeichen	23
Übungen zu § 4	23
§ 5. Das weitere Vorgehen	25
Kapitel 3. Syntax und Semantik der Prädikatenlogik	26
§ 6. Syntax und Semantik	26
6.1. Die Syntax der Sprache	27
6.2. Beweise und Definitionen induktiv über den Aufbau der Terme und Formeln	29
6.3. Strukturen und Deutungen	31
6.4. Ein kleines Beispiel für eine Sprache mit Deutung	35
Übungen zu § 6	36
§ 7. Prädikatenlogische Wahrheit	37

Kapitel 4. Eigenschaften der Prädikatenlogik	40
§ 8. Aussagenlogik im Rahmen der Prädikatenlogik	40
8.1. Erste Gesetze	40
8.2. Ersetzung und Spezialisierung	45
8.3. Weitere Gesetze	47
8.4. Formeln mit aussagenlogischem Aufbau	48
Übungen zu § 8	50
§ 9. Gesetze über Quantoren und Substitution	52
9.1. Gebundene und freie Variable	52
9.1.1. Definitionen	52
9.1.2. Das Koinzidenztheorem	54
9.2. Die Substitution	56
9.2.1. Definitionen	56
9.2.2. Die Bedeutung der Substitution: das Überführungstheorem	60
9.2.3. Die gebundene Umbenennung	61
9.3. Quantorengesetze	62
9.4. Normalformen	69
9.4.1. Pränex Normalformeln	69
9.4.2. Universelle Normalformeln	71
9.4.3. Konjunktive Normalformeln	74
Übungen zu § 9	76
§ 10. Logisches Schließen als „Rechnen“: Folgern – Ableiten	79
10.1. Problemstellung	79
10.2. Der semantische Folgerungsbegriff	81
10.3. Das syntaktische Ableiten	89
10.3.1. Einführung	89
10.3.2. Ableitungsregeln und eine Axiomenmenge für die Prädikatenlogik	92
10.3.3. Exkurs: Theorien	95
10.3.4. Skizze zum Verhältnis der eingeführten Begriffe zueinander	97
10.3.5. Gesetze über ableitbare Formeln	97
10.3.6. Eine Präzisierung des informellen Beweisens	104
10.4. Die syntaktische Widerspruchsfreiheit	105
Übungen zu § 10	106
§ 11. Der Vollständigkeitssatz	109
11.1. Herausarbeiten der wesentlichen Schwierigkeiten des Beweises	109
11.2. Exkurs: syntaktisch vollständige und maximal syntaktisch widerspruchsfreie Formelmengen	116
11.3. Der Beweis	118
11.4. Konsequenzen aus dem Vollständigkeitssatz	123

11.5. Prädikatenlogik mit Gleichheit	124
11.6. Spezielle Vollständigkeitsresultate	128
§ 12. Entscheidbarkeitsfragen	130
12.1. Bemerkungen zur Entwicklung des Entscheidungs- problems	131
12.2. Die Entscheidbarkeit der quantorenfreien Formeln (Aussagenlogik)	133
12.3. Die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik . . .	134
12.4. Die Semi-Entscheidbarkeit der Ableitungsmengen .	137
12.5. Ein Anwendungsbeispiel aus der Theorie der Pro- grammierung: das Terminationsproblem von Pro- grammen	143
12.5.1. Exkurs zum Forschungsgebiet Semantik von Programmiersprachen	143
12.5.2. Die Termination von Programmen	144
Übungen zu § 11 und § 12	152
Kapitel 5. Logische Grundlagen des maschinellen Beweisens (Resolventenprinzip)	155
§ 13. Einleitung	155
§ 14. Die Klauselform der Prädikatenlogik und Herbrand- Strukturen (eine Umformulierung der klassischen Logik)	158
14.1. Folgerungen und Nichterfüllbarkeit	159
14.2. Zur universellen Normalform	160
14.3. Die Klauselform der Prädikatenlogik	162
14.4. Herbrand-Strukturen und der Satz von Herbrand .	167
Übungen zu § 14	174
§ 15. Herbrand-Prozeduren	175
§ 16. Das Resolventenprinzip	179
16.1. Syntaktisches Ableiten in der Klausellojik	179
16.2. Der Vereinheitlichungsalgorithmus	182
16.3. Die Resolventenregel	187
16.4. Das Liften	190
16.5. Die Vollständigkeit der Resolventenregel	193
16.6. Split-Resolventen und volle Resolventen	195
Übungen zu § 16	199
§ 17. Beweisverfahren des Resolventenprinzips	201
17.1. Beweisverfahren	201
17.2. Zur Effizienz (Verfeinerungen der Resolventenregel)	205
Übungen zu § 17	212
§ 18. Der konstruktive Charakter von Resolventenableitungen (Greenscher Antworten-Extraktionsprozeß)	212

18.1. Motivation	214
18.2. Eine Verschärfung des Resolventensatzes	217
18.3. Resultate in Ableitungen	220
18.4. Ein Verfahren zur Berechnung von Resultaten mit Beispielen für dessen Anwendung	224
Übungen zu § 18	228
§ 19. Prädikatenlogik als Programmiersprache	230
Kapitel 6. Die Methode der Formalisierung: zwei Beispiele	238
§ 20. Informationswiedergewinnung als Anwendungsbeispiel	238
Übungen zu § 20	248
§ 21. Exkurs: das Formalisieren	248
§ 22. Die Formalisierung der Wertzuweisung	251
Übungen zu § 22	257
Kapitel 7. Probleme mit der Logik	259
§ 23. Grenzen der mathematischen Logik	259
23.1. Strukturen als „Wirklichkeit“	260
23.2. Zur Definition von Wahrheit	261
23.3. Der methodische Zirkel	262
23.4. Hinweise auf nichtbehandelte Sonderlogiken	263
23.5. Was ist semantisch, was syntaktisch?	264
23.6. Fazit	265
§ 24. Bemerkungen zur Geschichte der Logik	265
24.1. Warum werden in diesem Buch Probleme der Ge- schichte der Logik aufgegriffen?	265
24.2. Welche Möglichkeiten bestehen, die Geschichte der Logik adäquat zu behandeln?	267
24.3. Zum Verhältnis von Logik zu Mathematik (und Philosophie)	269
24.4. Zu innermathematischen Gründen, die zur Heraus- bildung der mathematischen Logik führten	273
24.5. Epilog	278
Schlußbemerkungen	279
Anhang	280
Teil A. Beweise von Eigenschaften über Zustandsabänderungen	280
Teil B. Der Beweis des Koinzidenztheorems	282

Teil C. Beweise von Eigenschaften der Substitution	283
C1. Beweis von Lemma 9.12.	283
C2. Charakterisierung der Komposition von Substitutionen	284
C3. Der Beweis des Überführungstheorems Satz 9.16	285
Teil D. Der Satz von der universellen Normalform	287
Teil E. Semantische und syntaktische Beweisführung	288
Teil F. Beispiele für die Verwendung von Ableitungen	290
F1. Beispiel für eine längere Ableitung	290
F2. Das Theorem über neue Konstanten	292
Teil G. Hilfsmittel für den Vollständigkeitssatz	293
G1. Der Lindenbaumsche Ergänzungssatz	293
G2. Der Beweis von Satz 11.17.	294
Teil H. Hilfsmittel aus der Theorie der Berechenbarkeit	296
H1. Liste der verwendeten Definitionen und Sätze aus der Theorie der berechenbaren Wortfunktionen	296
H2. Die Äquivalenz von Aufzählbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit	297
H3. Die Aufzählbarkeit der nichterfüllbaren Formeln	299
Teil I. Eine „strikte“ Syntax	300
Teil J. Zerlegungssatz für allgemeinste Vereinheitlicher	302
Literaturangaben	304
Hinweise zu weiterführender Literatur	311
Verzeichnis häufig verwendeter Symbole	315
Namen- und Sachverzeichnis	318