

# Springer-Lehrbuch

---



Jens Wittenburg

---

# Schwingungslehre

Lineare Schwingungen,  
Theorie und Anwendungen

Mit 102 Abbildungen



Springer

Prof. Dr.-Ing. Jens Wittenburg  
Institut für Technische Mechanik  
Universität Karlsruhe  
Kaiserstraße 12  
76128 Karlsruhe

ISBN 978-3-540-61004-5

Die Deutsche Bibliothek – Cip-Einheitsaufnahme  
Wittenburg, Jens: Schwingungslehre : lineare Schwingungen, Theorie und Anwendungen /  
Jens Wittenburg. - Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Budapest ; Hongkong ; London ;  
Mailand ; Paris ; Santa Clara ; Singapur ; Tokio : Springer, 1996  
(Springer-Lehrbuch)  
ISBN 978-3-540-61004-5      ISBN 978-3-642-58286-8 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-642-58286-8

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1996

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für die Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Satz: Datenkonvertierung durch H. Schlegel, Berlin  
SPIN: 10125234      60/3020 - 5 4 3 2 1 0 - Gedruckt auf säurefreiem Papier

## Vorwort

Dieses Buch ist aus Vorlesungen des Verfassers für Studierende des Maschinenbaus, des Bauingenieurwesens und der Technomathematik an den Universitäten Hannover und Karlsruhe entstanden. In 4 Kapiteln wird die mathematische Theorie linearer Schwingungen entwickelt. Im Vordergrund der Betrachtung stehen mechanische Systeme. Lineare Systeme allgemeinerer Struktur aus anderen Wissenschaftsgebieten werden aber ausdrücklich genannt und einbezogen.

Das 1. Kapitel behandelt Schwinger mit einem Freiheitsgrad. Es enthält Abschnitte über erzwungene Schwingungen bei linear von der Zeit abhängiger Erregerkreisfrequenz und über stationäre Schwingungen infolge periodischer Stöße. Auch das nichtlineare Problem der geschwindigkeitsquadratischen Dämpfung wird behandelt.

Das 2. Kapitel behandelt mechanische Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden und allgemeine – auch nichtmechanische – lineare Systeme. Das Kapitel unterscheidet sich von vielen anderen Lehrbüchern in den folgenden Abschnitten: Anwendung von graphentheoretischen Methoden bei der Formulierung von Bewegungsgleichungen, Verallgemeinerung des Begriffs reduzierte Masse, mehrfache Eigenwerte bei ungedämpften und bei gedämpften Eigenschwingungen, Rayleighquotienten für Biegestäbe, Berechnung von stationären erzwungenen Schwingungen mit Hilfe rekursiver Gleichungen, modale Entkopplung gedämpfter Systeme und Entkopplung beliebiger inhomogener Gleichungssysteme im Reellen. Viele Abschnitte betonen durch Verweise auf Kap. 1 die engen mathematischen Beziehungen zwischen Systemen mit  $n > 1$  Freiheitsgraden und Systemen mit einem Freiheitsgrad.

Das 3. Kapitel über parametererregte Schwingungen enthält die Floquettheorie sowohl für Systeme mit einem als auch für solche mit endlich vielen Freiheitsgraden. Es behandelt auch die Kombination von parametererregten und erzwungenen Schwingungen. Die Stabilität von Lösungen wird numerisch und mit Methoden der Störungsrechnung untersucht. Als Beispiel nichtperiodischer Parametererregung werden Schwingungen des Pendels mit linear von  $t$  abhängiger Pendellänge betrachtet.

Das 4. Kapitel behandelt die eindimensionale Wellengleichung für schwingende Stäbe und Saiten und die Euler-Bernoulli-Theorie des schwingenden Biegestabes. An die kontinuierlichen Systeme dürfen diskrete Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden ange koppelt sein. Im Zusammenhang mit der

Wellengleichung werden die d'Alembertsche und die Bernoullische Lösungsmethode dargestellt. Alle Systeme werden bei freien und bei erzwungenen Schwingungen untersucht. Für Eigenschwingungen werden Rayleighquotienten und das Ritzsche Verfahren formuliert.

Alle Kapitel enthalten zahlreiche ausführlich durchgerechnete Beispiele, die Kapitel 1 und 2 außerdem Aufgaben mit Lösungen. Bei Zahlenrechnungen haben die Systeme ganzzahlige Parameterwerte, mit denen auch alle Zwischen- und Endergebnisse ganzzahlig ausfallen.

Der geringe Umfang des Buches war vorgegeben. Das schloß ausführliche Darstellungen technisch interessanter Detailprobleme aus. Es beschränkte auch die Anzahl praktischer Beispiele zur Illustration theoretischer Zusammenhänge. Ganz unerwähnt bleiben die wichtigen Kapitel Zufallsschwingungen und Parameteridentifikation mittels meßtechnischer Verfahren. Sie hätten den Rahmen gesprengt.

Ich danke meinem Kollegen Prof. L. Lilov aus Sofia für anregende Diskussionen während der Abfassung des Buches. Sie brachten ihn zur Formulierung der Entkopplungsbedingung Gl. (2.89). Meine Mitarbeiter Frau Dipl.-Math. techn. B. Dittmar und Herr Dipl.-Ing. T. Reif haben das Manuskript kritisch gelesen und wertvolle Anregungen gegeben. Herr cand. mach. F. Blaszyk hat aus meinen FORTRAN-Programmen die zahlreichen Diagramme erzeugt. Ihnen allen wird herzlich gedankt. Schließlich danke ich den Damen und Herren des Springer-Verlages für die erfreuliche Zusammenarbeit und für die Umsetzung des  $\text{\TeX}$ -Manuskripts und der Handzeichnungen in ein ansprechendes Buch.

Karlsruhe, 1. Mai 1996

J. Wittenburg

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>Komplexe Zahlen in der Schwingungslehre</b>	<b>4</b>
<b>Stabilität und Instabilität</b>	<b>6</b>
<b>1 Systeme mit einem Freiheitsgrad</b>	<b>8</b>
1.1 Ungedämpfte Eigenschwingungen . . . . .	8
1.1.1 Formulierung der Bewegungsgleichung . . . . .	9
1.1.2 Lösung der Bewegungsgleichung . . . . .	12
1.1.3 Phasenkurven . . . . .	14
1.2 Gedämpfte Eigenschwingungen . . . . .	15
1.2.1 Coulombsche Dämpfung . . . . .	15
1.2.2 Geschwindigkeitsproportionale Dämpfung . . . . .	16
1.2.3 Geschwindigkeitsquadrat-proportionale Dämpfung . . . . .	23
1.3 Erzwungene Schwingungen . . . . .	26
1.3.1 Harmonische Erregung . . . . .	30
1.3.2 Arbeit und Leistung von Erregerkräften . . . . .	37
1.3.3 Periodische Erregung . . . . .	39
1.3.4 Spezielle Erregerfunktionen . . . . .	42
1.3.5 Variation der Konstanten. Faltungsintegrale . . . . .	45
1.3.6 Anlauf eines unwuchterregten Schwingers . . . . .	48
1.3.7 Erregung durch einen einzelnen Impuls . . . . .	57
1.3.8 Erregung durch periodische Impulse . . . . .	62
1.4 Aufgaben zu Kapitel 1 . . . . .	66
1.4.1 Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	67
<b>2 Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden</b>	<b>69</b>
2.1 Formulierung von Bewegungsgleichungen . . . . .	70
2.1.1 Massenmatrix. Steifigkeitsmatrix . . . . .	71
2.1.2 Dämpfungsmatrix. Dissipationsfunktion . . . . .	74
2.1.3 Linearisierung von Bewegungsgleichungen . . . . .	76
2.1.4 Gyroskopische Kräfte . . . . .	79
2.1.5 Schwingerketten . . . . .	80
2.1.6 Allgemeine lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten	90

2.2	Eigenschwingungen ungedämpfter mechanischer Systeme . . .	93
2.2.1	Modalmatrix . . . . .	93
2.2.2	Hauptkoordinaten . . . . .	97
2.3	Approximation der niedrigsten Eigenkreisfrequenz . . . . .	101
2.3.1	Der Rayleighquotient . . . . .	101
2.3.2	Das Verfahren von Ritz . . . . .	103
2.3.3	Anwendungen auf Biegestäbe . . . . .	104
2.3.4	Homogene Biegestäbe . . . . .	106
2.4	Eigenschwingungen allgemeiner linearer Systeme . . . . .	107
2.4.1	Lösung durch die Fundamentalmatrix . . . . .	108
2.4.2	Lösung durch Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	108
2.4.3	Der Sonderfall mechanischer Systeme . . . . .	111
2.4.4	Durchdringende Dämpfung . . . . .	115
2.5	Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung . . . . .	116
2.5.1	Periodische Erregung . . . . .	118
2.5.2	Resonanz. Scheinresonanz . . . . .	119
2.5.3	Schwingerketten . . . . .	120
2.6	Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung . . . . .	127
2.6.1	Periodische Erregung . . . . .	128
2.6.2	Schwingungstilgung . . . . .	129
2.7	Entkopplung der inhomogenen Gleichungen . . . . .	133
2.7.1	Entkopplung bei $N$ unabhängigen Eigenvektoren . . .	133
2.7.2	Der Fall von $< N$ unabhängigen Eigenvektoren . . .	137
2.8	Aufgaben zu Kapitel 2 . . . . .	138
2.8.1	Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	144
<b>3</b>	<b>Parametererregte Schwingungen</b>	<b>147</b>
3.1	Das Pendel mit veränderlicher Länge . . . . .	147
3.2	Periodische Parametererregung . . . . .	152
3.2.1	Der Satz von Floquet . . . . .	153
3.2.2	Stabilitätskriterien . . . . .	160
3.2.3	Numerische Lösungen . . . . .	161
3.2.4	Stabilitätsgrenzen . . . . .	162
3.2.5	Die Stabilitätskarte der Mathieugleichung . . . . .	166
3.2.6	Das stehende Mehrkörperpendel . . . . .	173
3.2.7	Erzwungene Schwingungen und Parametererregung . .	175
3.3	Parametererregte $n$ -Freiheitsgrad-Systeme . . . . .	179
3.3.1	Der Satz von Floquet . . . . .	181
3.3.2	Stabilitätskriterien . . . . .	181
3.3.3	Numerische Lösungen . . . . .	181
3.3.4	Erzwungene Schwingungen und Parametererregung . .	182



<b>4 Eindimensionale Kontinua</b>	<b>183</b>
4.1 Die Wellengleichung . . . . .	183
4.1.1 Die schwingende Saite . . . . .	184
4.1.2 Longitudinalschwingungen eines Stabes . . . . .	184
4.1.3 Torsionsschwingungen eines Stabes . . . . .	185
4.1.4 Randbedingungen und Anfangsbedingungen . . . . .	186
4.2 Lösungen der Wellengleichung nach d'Alembert . . . . .	187
4.2.1 Charakteristiken . . . . .	188
4.2.2 Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten . . . . .	191
4.2.3 Harmonische Wellen . . . . .	192
4.2.4 Wellen infolge Anfangsbedingungen . . . . .	193
4.2.5 Erzwungene Wellen . . . . .	195
4.2.6 Reflexion und Transmission von Wellen . . . . .	198
4.3 Bernoulli-Lösungen der Wellengleichung . . . . .	203
4.3.1 Ungedämpfte Eigenschwingungen . . . . .	203
4.3.2 Erzwungene periodische Schwingungen . . . . .	209
4.4 Biegeschwingungen von Stäben . . . . .	211
4.4.1 Die Bewegungsgleichung . . . . .	211
4.4.2 Randbedingungen und Anfangsbedingungen . . . . .	213
4.4.3 Biegewellen. Dispersion . . . . .	214
4.4.4 Ungedämpfte Eigenschwingungen . . . . .	215
4.4.5 Der Rayleighquotient für Biegestäbe . . . . .	221
4.4.6 Das Verfahren von Ritz . . . . .	222
4.4.7 Erzwungene periodische Biegeschwingungen . . . . .	223
<b>Literatur</b>	<b>227</b>
<b>Sachverzeichnis</b>	<b>229</b>