

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Udo F. Meißner · Andreas Maurial

Die Methode der finiten Elemente

Eine Einführung in die Grundlagen

2. Auflage

Mit 162 Abbildungen



Springer

Univ.-Prof. Dr.-Ing. UDO F. MEISSNER

Technische Universität Darmstadt
Institut für Numerische Methoden
und Informatik im Bauwesen
Petersenstr. 13
64287 Darmstadt
e-mail: sekretariat@iib.tu-darmstadt.de

Prof. Dr.-Ing. ANDREAS MAURIAL

Fachhochschule Regensburg
Fachbereich Bauingenieurwesen
Prüfener Str. 58
93049 Regensburg
e-mail: andreas.maurial@bau.fh-regensburg.de

ISBN 978-3-540-67439-9

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Meißner, Udo F.:

Die Methode der finiten Elemente: eine Einführung in die Grundlagen / Udo F. Meißner; Andreas Maurial.
2. Auflage. – Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Hongkong ; London ; Mailand ; Paris ; Singapur ;
Tokio: Springer 2000

ISBN 978-3-540-67439-9 ISBN 978-3-642-57250-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-57250-0

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z. B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für die Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Einbandentwurf: Design & Production, Heidelberg

Satz: Fotosatz-Service Köhler GmbH, Würzburg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

SPIN: 10767955

68/3020 – 5 4 3 2 1 0

Meinem akademischen Lehrer

Herrn Dr.-Ing. Dieter Withum

Professor für Strömungsmechanik und
Elektronisches Rechnen im Bauwesen,
Technische Universität Hannover 1967 bis 1974,
Professor für Statik und Mechanik,
Hochschule der Bundeswehr München 1974 bis 1979

* 29.9.1928

† 25.6.1979

Udo F. Meißner

Meinem Vater

Andreas Maurial

Vorwort zur zweiten Auflage

An dieser Stelle möchten wir uns für die wertvollen Anregungen unserer aufmerksamen Leser aus Wissenschaft und Berufspraxis bedanken. Ihr Interesse hat uns zu dieser zweiten Auflage des vorliegenden Buches bewogen.

Inhaltlich erfuhr die neue Auflage eine Erweiterung um das Kapitel zum Übertragungsverfahren. In ihm werden eine Reihe von Vorteilen und sinnvollen Einsatzmöglichkeiten aufgezeigt, die dieses Verfahren für die Methode der finiten Elemente bietet. Darüber hinaus wurden gegenüber der ersten Auflage nur geringe Änderungen vorgenommen und verschiedene Druckfehler beseitigt.

Für die gute Zusammenarbeit bei der Einarbeitung des zusätzlichen Kapitels sowie der Durchführung der Korrekturen gilt auch bei dieser Auflage dem Springer-Verlag unser besonderer Dank. Frau Dipl.-Ing. Inke Terlinden und Herrn Sebastian Meißner möchten wir sehr herzlich für die redaktionelle Bearbeitung des neuen Kapitels danken.

Darmstadt und Regensburg,
im September 2000

Udo F. Meißner
Andreas Maurial

Vorwort zur ersten Auflage

Der vorliegende Band behandelt die Grundlagen der Methode der finiten Elemente für statische Probleme. Er stellt eine Einführung in die Methodik dar, die am Beispiel der Stabtragwerke in Einzelheiten erläutert wird. Das Buch beschränkt sich bewußt allein auf die Behandlung von Stäben, um dem Leser die Gelegenheit zu geben, alle Matrizenformulierungen auch im Detail nachvollziehen zu können. Die Allgemeingültigkeit wird durch diese Darstellung nicht eingeschränkt. Vielmehr wird es dem Leser hierdurch leichter fallen, auch später komplizierte finite Elemente für Flächenträger in die aufgebaute Systematik einzuordnen.

Das Werk wendet sich daher nicht nur an den Anfänger, sondern auch an Fortgeschrittene, die nach einer durchgängigen Darstellung suchen, um die prinzipiellen Voraussetzungen und die darauf aufbauenden Algorithmen noch besser zu verstehen. Insoweit findet der Benutzer auch konkrete Hinweise auf die Gestaltung entsprechender Software.

Das Buch wurde für das Selbststudium konzipiert. Demzufolge wurde auf eine deduktive Darstellung, ausgehend von den übergeordneten Prinzipien der Mechanik und Statik, verzichtet, um an das tradierte Wissen des Ingenieurs anzuknüpfen.

Inhalt und Aufbereitung des Lehrstoffs wurden im „Weiterbildenden Studium Bauingenieurwesen“ der Universität Hannover mit zahlreichen Fachleuten aus der Berufspraxis erprobt. Der vorliegende Band dient im Studienschwerpunkt „Numerische Methoden und Datenverarbeitung im Konstruktiven Ingenieurbau“ als Textbuch für das Fernstudium. Die zahlreichen Anregungen aus der Praxis und die Gespräche mit dem Springer-Verlag haben uns ermutigt, diesen Band einer größeren Fachöffentlichkeit vorzulegen.

Zum dargestellten Lehrstoff existiert an der Universität Hannover begleitende Teachware für Personal Computer, die in der Lehre eingesetzt wird. Es ist geplant, den Lehrstoff mit einem Band speziell über die Behandlung von Flächenträgern zu vertiefen.

Ganz besonderer Dank gilt Frau E. Borchert sowie den Herren Dipl.-Ing. D. Berndt, cand.-Ing. H.-J. Benkert und R. Behrens, die durch die sorgfältige fachliche Bearbeitung und technische Umsetzung des Manuskripts die Veröffentlichung dieses Bandes ermöglicht haben.

Hannover, im April 1989

Udo Meißner, Andreas Menzel

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbetrachtungen zur Methode der finiten Elemente	1
1.1	Fachliche Einordnung	1
1.2	Historische Entwicklung	6
1.3	Überblick	8
1.4	Methodenübersicht	13
1.5	Idealisierung	18
1.6	Rechenprogramme	23
1.7	Vororientierung	28
2	Fehlerabgleichsverfahren	31
2.1	Lernziel	31
2.2	Grundgleichungen des Biegebalkens	32
2.3	Analytische Lösungen	35
	Übungsaufgabe 2.1	36
	Übungsaufgabe 2.2	36
2.4	Verfahren von Bubnov/Galerkin	37
	Übungsaufgabe 2.3	42
2.5	Verfahren von Ritz	42
2.6	Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate	46
	Übungsaufgabe 2.4	52
2.7	Ansatzfunktionen	52
	Übungsaufgabe 2.5	57
2.8	Abbruchfehler	58
	Übungsaufgabe 2.6	61
3	Deformationsmethode	63
3.1	Lernziel	63
3.2	Steifigkeitsmatrix des Biegebalkens	64
	Übungsaufgabe 3.1	72
	Übungsaufgabe 3.2	72
	Übungsaufgabe 3.3	72
	Übungsaufgabe 3.4	73
3.3	Steifigkeitsmatrizen anderer Stabelemente	73
3.3.1	Biegestab	74
3.3.2	Zug-Druck-Stab	76

3.3.3	Torsionsstab	78
3.3.4	Räumlicher Stab	80
3.3.5	Abschließende Anmerkungen zu den unterschiedlichen Stabelementen	86
	Übungsaufgabe 3.5	87
	Übungsaufgabe 3.6	87
	Übungsaufgabe 3.7	87
	Übungsaufgabe 3.8	87
3.4	Zusammenbau zum Gesamttragwerk	88
3.5	Berechnung des Gesamtsystems	101
3.5.1	Einzelfedern	102
3.5.2	Stützensenkungen und Einzellasten	105
3.5.3	Auflagerbedingungen	106
	Übungsaufgabe 3.9	108
3.5.4	Auflösung des Gleichungssystems	108
3.5.5	Auflagerkraftgrößen	118
	Übungsaufgabe 3.10	120
	Übungsaufgabe 3.11	120
	Übungsaufgabe 3.12	121
3.6	Berechnung der Schnittgrößen	121
3.7	Ablauf der Berechnungen	126
3.8	Kombinierte Tragwerksarten	128
3.9	Abschließende Bemerkungen	132
	Übungsaufgabe 3.13	133
4	Arbeitsprinzip	135
4.1	Lernziel	135
4.2	Prinzip der virtuellen Verrückungen und Arbeiten	136
4.2.1	Steifigkeitsbeziehung des Biegebalkens	146
4.2.2	Berücksichtigung von Stabendgelenken	155
	Übungsaufgabe 4.1	160
	Übungsaufgabe 4.2	160
4.3	Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie.	161
4.3.1	Steifigkeitsbeziehung des Zug-Druck-Stabs	167
4.4	Berücksichtigung von Temperaturdehnungen	176
4.4.1	Temperatur am Zug-Druck-Stab	178
4.4.2	Temperatur am Biegebalken	180
4.4.3	Abschließende Bemerkungen	183
	Übungsaufgabe 4.3	183
4.5	Steifigkeitsbeziehung des Gesamttragwerks	183
4.6	Konvergenzbetrachtungen	192
4.7	A-Posteriori-Fehler	202
4.7.1	p -Version	208
4.7.2	h -Version	210
4.8	Abschließende Bemerkungen	211
	Übungsaufgabe 4.4	211

5	Diskretisierte Systeme	213
5.1	Lernziel	213
5.2	Transformationen	213
5.2.1	Globale Knotenbezugssysteme	213
5.2.2	Räumliche Transformation der Verschiebungsgrößen	217
5.2.3	Exzentrische Anschlüsse	221
5.2.4	Globale Steifigkeitsbeziehung des räumlichen Stabs	224
5.3	Ebenes Fachwerk	226
5.4	Ebener Rahmen	230
5.5	Trägerrost	234
	Übungsaufgabe 5.1	240
	Übungsaufgabe 5.2	240
6	Übertragungsverfahren	243
6.1	Lernziel	243
6.2	Grundgleichungen des Übertragungsverfahrens	244
6.3	Herleitung der Steifigkeitsbeziehung mit Hilfe des Übertragungsverfahrens	250
	Übungsaufgabe 6.1	256
7	Schlußbemerkungen	257
8	Lösungen zu den Übungsaufgaben	259
	Literaturverzeichnis	295
	Sachverzeichnis	299