

# Springer-Lehrbuch

---

**Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH**

Klaus D. Schmidt

# Mathematik

Grundlagen für  
Wirtschaftswissenschaftler

Zweite, überarbeitete Auflage



Springer

Prof. Dr. Klaus D. Schmidt  
Technische Universität Dresden  
Institut für Mathematische Stochastik  
Lehrstuhl für Versicherungsmathematik  
D-01062 Dresden

ISBN 978-3-540-66521-2

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Schmidt, Klaus D.: Mathematik: Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler, 2., überarb. Aufl. / Klaus D. Schmidt. – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Singapur; Tokio: Springer, 2000 (Springer-Lehrbuch)

ISBN 978-3-540-66521-2 ISBN 978-3-642-57164-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-57164-0

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2000

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPIN 10745814 42/2202-5 4 3 2 1 0 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

# Vorwort

Mathematische Modelle und Methoden gewinnen in den Wirtschaftswissenschaften zunehmend an Bedeutung. Die Gründe dafür sind vielfältig: Zum einen lassen sich wirtschaftliche Zusammenhänge allenfalls in den einfachsten Fällen allein mit Worten exakt beschreiben; zum anderen erzwingt die mathematische Beschreibung solcher Zusammenhänge genaue Rechenschaft darüber, welche Objekte, welche Eigenschaften der Objekte und welche Beziehungen zwischen ihnen als gegeben anzunehmen sind. Hier erweist sich die Sprache der Mathematik als hilfreich. Darüber hinaus läßt sich mit Hilfe der Methoden der Mathematik erkennen, welche Folgerungen sich aus bestimmten Annahmen über wirtschaftliche Zusammenhänge ergeben. Mathematik spielt daher eine doppelte Rolle in den Wirtschaftswissenschaften: Sie dient als Sprache für die Formulierung von Modellen und als Methode zur Analyse von Modellen.

Das vorliegende Buch ist aus Mathematik-Vorlesungen für Wirtschaftswissenschaftler entstanden, die ich an der Technischen Universität Dresden gehalten habe. Es behandelt neben den Grundbegriffen die wesentlichen Themen der Linearen Algebra und der Analysis. Wenngleich ich meine, daß es eine spezielle Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler nicht gibt, so war mir doch daran gelegen, bei der Auswahl der Themen die für Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften besonders wichtigen Aspekte der Mathematik hervorzuheben.

*Der geneigte Leser möge, bevor er mit dem Buch zu arbeiten beginnt, ein wenig blättern und bei dem einen oder anderen der Beispiele aus den Wirtschaftswissenschaften verweilen, um so einen ersten Eindruck davon zu gewinnen, daß mathematische Methoden für die Behandlung vieler Probleme nützlich und oft sogar notwendig sind.*

Die Beschäftigung mit Mathematik erfordert Mühe und Geduld, und der Leser ist gut beraten, es an beidem nicht fehlen zu lassen.

Das wichtigste ist oft das Kleingedruckte: Für das Verständnis der mathematischen Begriffe, Methoden und Aussagen ist es unerläßlich, die mathematischen Beispiele mit Bleistift und Papier durchzuarbeiten. Ein Beispiel ist erst dann verstanden, wenn es gelingt, die Rechnung auch bei geschlossenem Buch durchzuführen!

Für das Verständnis mathematischer Aussagen sind neben den Beispielen auch die Beweise von Nutzen; die Beweise lassen beispielsweise erkennen, warum in

der Formulierung mathematischer Aussagen bestimmte Annahmen getroffen werden. In einigen Fällen sind Beweise jedoch notwendigerweise trickreich und technisch oder auch nur technisch und langweilig. Ich habe Beweise daher nur dann ausgeführt, wenn sie einigermaßen zugänglich sind und zudem geeignet sind, Zusammenhänge verdeutlichen.

Zur Notation sei an dieser Stelle lediglich an die üblichen Bezeichnungen für Summen

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

und Produkte

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

mit den Konventionen  $\sum_{i=1}^0 a_i := 0$  und  $\prod_{i=1}^0 a_i := 1$  erinnert. Alles weitere findet sich im Text.

Wer Mathematik in den Wirtschaftswissenschaften erfolgreich anwenden will, wird auf Dauer mit dem Wissen aus den Grundvorlesungen nicht auskommen. Es war mir daher auch ein Anliegen, mit diesem Buch den Zugang zu mathematischen Lehrbüchern, die spezielle Themen vertiefen, zu erleichtern. Aus diesem Anliegen ergibt sich zunächst eine gewisse Strenge der Notation, die sich beispielsweise in der strikten Unterscheidung zwischen einer Funktion und ihren Werten ausdrückt. Darüber hinaus erweist es sich als sinnvoll, allgemeine Prinzipien, die die Vielfalt der Mathematik einen, zu betonen; dazu gehören abstrakte Begriffe wie der einer linearen Abbildung und allgemeine Fragen wie die nach der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung eines mathematischen Problems.

Kein Output ohne Input:

- Wolfgang Macht hat die Entstehung des Buches von Anfang an begleitet und mit seiner reichen Kenntnis, seiner umfangreichen Lehrerfahrung und nicht zuletzt seiner Hartnäckigkeit in unzähligen Diskussionen einen wesentlichen Beitrag zum Gelingen geleistet.
- Klaus–Thomas Heß hat mich mit vielfältigen Anregungen vor allem in den Kapiteln zur Analysis unterstützt.
- Thomas Ridder, mit dem ich in gemeinsamen Mannheimer Jahren ausgiebig über Mathematik in den Wirtschaftswissenschaften debattiert habe, hat die Beispiele aus den Wirtschaftswissenschaften durchgesehen.
- Juliane Baumgart, Christiane Weber und Angela Wünsche haben das Manuskript korrekturgelesen, das Stichwortverzeichnis vorbereitet und zahlreiche Verbesserungsvorschläge zum Inhalt gemacht.

Ihnen allen sei an dieser Stelle herzlich gedankt.

## Vorwort zur zweiten Auflage

Es ist alles nicht so einfach. Dieser Ausspruch, der einem meiner Diplomanden zu verdanken ist, könnte auch Lesern oder Autoren von Lehrbüchern entfahren sein. Leider gab es in der ersten Auflage dieses Buches etliche typographische Fehler und einige inhaltliche Ungenauigkeiten, die dem Anspruch des Buches nicht angemessen sind. In der vorliegenden Neuauflage habe ich alle Fehler, die mir bekannt geworden sind, korrigiert und mich an einigen Stellen um eine klarere Darstellung bemüht. Mein herzlicher Dank gilt Klaus-Thomas Heß und Dietmar Hudak für ihre Hinweise.

Dresden, im Juli 1999

Klaus D. Schmidt

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Formale Logik</b>	<b>1</b>
1.1	Die Axiome von Peano . . . . .	1
1.2	Aussagenlogik . . . . .	3
1.3	Quantoren . . . . .	10
1.4	Mathematische Schlußweisen . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Mengenlehre</b>	<b>21</b>
2.1	Mengen und ihre Elemente . . . . .	21
2.2	Mengenalgebra . . . . .	25
2.3	Relationen . . . . .	30
2.4	Abbildungen . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Zahlen</b>	<b>43</b>
3.1	Die natürlichen Zahlen . . . . .	43
3.2	Die reellen Zahlen . . . . .	56
3.3	Die ganzen Zahlen und die rationalen Zahlen . . . . .	62
3.4	Die komplexen Zahlen . . . . .	64
3.5	Algebraische Strukturen . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Vektoren</b>	<b>75</b>
4.1	Vektoralgebra . . . . .	75
4.2	Vektorräume . . . . .	81
4.3	Vektorräume mit Norm . . . . .	86
4.4	Vektorräume mit Skalarprodukt . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Matrizen</b>	<b>93</b>
5.1	Matrixalgebra . . . . .	93
5.2	Matrizen als lineare Abbildungen . . . . .	99
5.3	Quadratische Matrizen . . . . .	109
5.4	Spur und Determinante . . . . .	117
5.5	Reguläre Matrizen . . . . .	128
5.6	Spezielle quadratische Matrizen . . . . .	132



<b>6</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>139</b>
6.1	Das Austauschverfahren . . . . .	139
6.2	Das Austauschverfahren als Algorithmus . . . . .	145
6.3	Matrizengleichungen . . . . .	151
6.4	Bestimmung von Kern und Rang . . . . .	153
6.5	Bestimmung der Inversen einer regulären Matrix . . . . .	155
<b>7</b>	<b>Lineare Optimierung</b>	<b>159</b>
7.1	Beispiele für lineare Optimierungsprobleme . . . . .	160
7.2	Das Minimumproblem in Normalform . . . . .	167
7.3	Basisdarstellungen und Basislösungen . . . . .	171
7.4	Das Simplexkriterium . . . . .	174
7.5	Das Simplexverfahren . . . . .	178
7.6	Bestimmung einer zulässigen Basislösung . . . . .	184
7.7	Algorithmische Lösung der Beispiele . . . . .	190
<b>8</b>	<b>Lineare Differenzgleichungen</b>	<b>201</b>
8.1	Folgen . . . . .	201
8.2	Lineare Differenzgleichungen 1. Ordnung . . . . .	206
8.3	Lineare Differenzgleichungen 2. Ordnung . . . . .	221
8.4	Der Differenzenoperator . . . . .	230
<b>9</b>	<b>Konvergenz von Folgen, Reihen und Produkten</b>	<b>233</b>
9.1	Konvergenz von Folgen . . . . .	233
9.2	Konvergenz von Reihen . . . . .	249
9.3	Konvergenz von Produkten . . . . .	261
<b>10</b>	<b>Stetige Funktionen in einer Variablen</b>	<b>263</b>
10.1	Stetigkeit . . . . .	263
10.2	Stetige Funktionen . . . . .	266
10.3	Spezielle stetige Funktionen . . . . .	274
<b>11</b>	<b>Differentialrechnung in einer Variablen</b>	<b>287</b>
11.1	Differenzierbarkeit . . . . .	287
11.2	Einmal differenzierbare Funktionen . . . . .	295
11.3	Zweimal differenzierbare Funktionen . . . . .	304
11.4	Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	307
<b>12</b>	<b>Lineare Differentialgleichungen</b>	<b>309</b>
12.1	Das unbestimmte Integral . . . . .	309
12.2	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	317
12.3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	329
12.4	Der Differentialoperator . . . . .	343

---

<b>13 Integralrechnung</b>	<b>345</b>
13.1 Das bestimmte Integral . . . . .	345
13.2 Uneigentliche Integrale . . . . .	357
<b>14 Differentialrechnung in mehreren Variablen</b>	<b>363</b>
14.1 Konvergenz im Euklidischen Raum . . . . .	363
14.2 Reelle Funktionen in mehreren Variablen . . . . .	367
14.3 Stetigkeit . . . . .	369
14.4 Partielle Differenzierbarkeit . . . . .	373
14.5 Einmal partiell differenzierbare Funktionen . . . . .	376
14.6 Zweimal partiell differenzierbare Funktionen . . . . .	384
14.7 Optimierung unter Nebenbedingungen . . . . .	396
<b>Literatur</b>	<b>401</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>403</b>