

*Canty*  
Konfliktlösungen mit Mathematica®

**Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH**

M.J. Canty

# Konfliktlösungen mit Mathematica®

Zweipersonenspiele



Springer

*Morton J. Canty*

Forschungszentrum Jülich GmbH

Technologiefolgenforschung

52425 Jülich, Deutschland

e-mail: m.canty@fz-juelich.de

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

**Konfliktlösungen mit Mathematica** [Medienkombination]: Zweipersonenspiele / Morton J. Canty.- Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Singapur; Tokio:

Springer ISBN 978-3-540-65827-6 ISBN 978-3-642-57107-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-57107-7

Buch. 1999 Diskette. 1999

---

Mathematics Subject Classification (1991): 90D05, 68Q40

---

**ISBN 978-3-540-65827-6**

**Additional material to this book can be downloaded from <http://extras.springer.com>**

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funk- sendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten . Eine Ver- vielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. Sep- tember 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwi- derhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Springer-Verlag ist nicht Urheber der Daten und Programme. Weder der Springer-Verlag noch der Autor übernehmen Haftung für die Diskette und das Buch, einschließlich ihrer Qualität, Handels- oder Anwendereignung. In keinem Fall übernehmen der Springer-Verlag oder der Autor Haftung für direk- te, indirekte, zufällige oder Folgeschäden, die sich aus der Nutzung der Diskette oder des Buches ergeben.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2000

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk be- rechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jeder- mann benutzt werden dürften.

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage des Autors

SPIN 10710615

40/3143CK-5 4 3 2 1 0 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

*Denn nichts scheint denen trübe, die gewinnen*

- William Shakespeare

# Vorwort

*It turns out that the solution to any linear programming problem always corresponds to a point which lies on the boundary of the region defined for that problem.*

- The *Mathematica* Book

Dieses Zitat, aus Stephen Wolframs enzyklopädischem *Mathematica*-Handbuch entnommen, liefert die Grundlage des Simplexverfahrens, einer Rechenvorschrift, die unter anderem zur numerischen Lösung von endlichen Nullsummenspielen dient. Der Schwerpunkt dieses Buches liegt jedoch bei Lösungstechniken, die über den wohlbekannten Simplex-Algorithmus hinausgehen. Kernstück der Abhandlung ist die Programmierung eines auf dem sogenannten linearen Komplementaritätsproblem (LCP) beruhenden Algorithmus zur Bestimmung der Nash-Gleichgewichte eines endlichen, nichtkooperativen Zweipersonenspiels. Mit diesem *Mathematica*-Programm wird daraufhin eine ganze Reihe von interessanten „Konfliktsituationen“ untersucht. Der Algorithmus ist aus prinzipiellen Gründen nicht besonders effizient und nur für Spiele mit einer verhältnismäßig kleinen Anzahl von strategischen Alternativen geeignet. Ein hübscher Aspekt seiner *Mathematica*-Ausführung ist aber, daß Lösungen auch in symbolischer Form abgefragt werden können. Dadurch wird die Struktur der Spiele manchmal ersichtlicher, als wenn nur numerische Ergebnisse vorliegen, und die Verallgemeinerung von speziellen Situationen erheblich erleichtert.

Hier wird kein Anspruch erhoben, eine umfassende Einführung in die Spieltheorie anzubieten. Beispielsweise werden Extensivformspiele wenig und Mehrpersonenspiele oder gar kooperative Spiele überhaupt nicht erwähnt. Durch eine detaillierte Behandlung der Theorie der Zweipersonenspiele in strategischer Normalform und mit Hilfe von vielen, zum Teil recht realistischen Beispielen wurde jedoch versucht, ein Gefühl für die Feinheiten und die Relevanz der Spieltheorie zu vermitteln.

Das Formelle wird anhand von Standardbeispielen illustriert und erklärt, praktische Konflikte werden spieltheoretisch modelliert und mit dem im Text entwickelten algorithmischen Werkzeug gelöst. Mittels einer engen Verknüpfung des Textes mit *Mathematica*-Notebooks, soll dem(der) Leser(in) vor allem ein unterhaltsamer und nachvollziehbarer Zugang zu den grundlegenden Prinzipien dieser Disziplin angeboten werden. Wegen des computer-

algebraischen Ansatzes liegt der Schwerpunkt der Darstellung stärker auf dem Experimentieren am Rechner und weniger auf den klassisch-analytischen Lösungstechniken zu den dieses Buch als Ergänzung seinen Beitrag leisten soll: Wenn die für das Experimentieren verwendeten Algorithmen verstanden sind, ist die dahinterliegende Theorie auch besser verstanden.

Was wird mit einer solch betonten algorithmischen Sichtweise eigentlich gewonnen? Auch wenn der berühmte Existenzsatz des John Nash stets rationale Lösungen garantiert, macht er keinerlei Aussage darüber, wie man sie finden soll. Oft muß man eine gute Portion Glück bzw. Intuition besitzen, um überhaupt ein Gleichgewicht eines nichttrivialen Spiels zu erraten. Mit dem Computer haben wir ein sehr nützliches Werkzeug zur Hand, das unsere Intuition unterstützt und eben diese kritische Phase des Erratens um einiges erleichtert, bzw. uns sogar völlig abnimmt. Sehr wichtig ist auch die Tatsache, daß die im Text entwickelten Algorithmen – genügend Rechenkapazität vorausgesetzt – *alle* Gleichgewichte eines Spiels finden. So ist die Gefahr, eine optimale strategische Alternative übersehen zu haben, gebannt. Das „mechanische“ Abzählen der Gleichgewichte bietet überdies die Möglichkeit, mit einem *Generate-and-Test*-Verfahren verfeinerte Lösungen, wie z.B. perfekte oder evolutionsstabile Gleichgewichte, vollständig zu bestimmen.

Das erste Kapitel des Buches befaßt sich mit einer kurzen Einführung in die Theorie der Bimatrixspiele und stellt den oben erwähnten LCP-Algorithmus sowie ein entsprechendes *Mathematica*-Programm vor. Das zweite Kapitel zeigt, wie dieses Werkzeug dann eingesetzt werden kann, um einige realistische Konfliktsituationen – sogenannte Inspektionsspiele – zu analysieren. Im dritten und vierten Kapitel wird die Gleichgewichtsauswahltheorie behandelt, in der Verfeinerungen des Gleichgewichtskonzeptes zwecks Eingrenzung der Zahl der infrage kommenden Lösungen diskutiert werden. Im dritten Kapitel geht es dabei um diejenigen optimalen Verhaltensmuster, die sich bei Tieren durch die Evolution einstellen und die stabil gegenüber „Invasionen“ von außen sind. Im vierten Kapitel werden Gleichgewichte eliminiert, die sich vor allem in manchen dynamischen Spielen als gewissermaßen unglaublich erweisen. Das fünfte Kapitel vervollständigt die im Laufe der Diskussion oft eingesetzte lineare Optimierungstheorie und liefert einen unabhängigen Existenzbeweis für Gleichgewichte in Matrixspielen. Hier wird auch auf die Gattung Inspektionsspiele wieder Bezug genommen und es werden mehrere interessante Nullsummenvarianten untersucht. Jedes Kapitel wird mit Anregungen zum weiteren Experimentieren am Rechner abgeschlossen.

In den kurzen Anhängen A und B werden einige wichtige Begriffe aus dem Text eingehender erklärt, im Anhang C dagegen werden Ausführungen von zwei weiteren Algorithmen zur Lösung von Bimatrixspielen vorgestellt: der Algorithmus von Lemke und Howson sowie ein Algorithmus von Mangasarian mit der Extrempunkt-Enumerationsmethode von Avis und Fukuda. Schließlich erklärt Anhang D das Funktionspaket *GameTheory*‘Bimatrix‘,

das sämtliche im Text entwickelten Algorithmen zur Bestimmung bzw. Auswahl von Gleichgewichten in einem *Mathematica*-Package zusammenfaßt.

Gestellte Voraussetzungen an den(die) Leser(in) sind lediglich eine Bekanntschaft mit der Sprache *Mathematica* sowie etwas Vertrautheit im Umgang mit Vektoren und Matrizen. Darüber hinausgehende Kenntnisse werden im Text bzw. in den technischen Anhängen vermittelt. Auf einer begleitenden Diskette befinden sich *Mathematica*-Notebooks für sämtliche Kapitel (einschließlich Aufgabenlösungen) sowie das oben erwähnte *Mathematica*-Package.

Dieses Buch eignet sich für ein einfaches Spieltheorieseminar bzw. für eine Einführungsvorlesung für Ingenieure, Informatiker, Sozialwissenschaftler oder Biologen. Einige anspruchsvollere Passagen, wie z.B. die Abschnitte 4.3.3 und 5.2, sowie Anhang C stellen höhere Anforderungen und dienen dem Zweck, einen in sich geschlossenen Text bereitzustellen. Da die wenigsten Standardwerke algorithmische Methoden betonen, ist das Buch auch als Begleitlehrbuch für eingehendere Behandlungen der Spieltheorie geeignet, z.B. in der wirtschaftswissenschaftlichen Lehre.

Die Hauptquellen für das hier vorgestellte Material sind:

- Kapitel 1: N. N. Vorob'evs *Game Theory* [Vor77] sowie der Review-Artikel *Computing Equilibria for Two-Person-Games* von Bernhard von Stengel [vS99].
- Kapitel 2: Eigene Forschungsergebnisse, insbesondere die in der von Rudolf Avenhaus und dem Autor verfassten Monographie *Compliance Quantified* [AC96] beschriebenen Inspektionsspiele.
- Kapitel 3 und 4: *Games, Theory and Applications* von L. C. Thomas [Tho86] sowie Eric van Damme, *Stability and Perfection of Nash Equilibria* [vD91].
- Kapitel 5: Klaus Neumanns *Operations Research Verfahren* [Neu75] und vor allem das sehr lesbare und lesenswerte Buch *Game Theory, Mathematical models of conflict* des A. J. Jones [Jon80].
- Anhang C: Richard D. McKelvey und Andrew McLennan, *Computation of Equilibria in Finite Games* [MM96].
- *Mathematica*: Stephen Wolframs *Mathematica Book* [Wol99] und *Programming in Mathematica* von Roman Maeder [Mae96].

Für ihr sorgfältiges Lesen von Teilen des Manuskripts und für ihre vielen konstruktiven Verbesserungsvorschläge bin ich meinen Kollegen Rudolf Avenhaus, Bernd Richter und Bernhard von Stengel sehr dankbar. Mein Dank gilt auch Komei Fukuda für sein Erlaubnis, `VertexEnum.m` mit auf die begleitende Diskette zu legen und insbesondere Bernhard von Stengel für seine Hilfe bei der Programmierung der Nash-Komponenten-Prozedur.

Jülich, im Juli 1999

*Morton Canty*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Bimatrixspiele</b> .....	1
1.1 Der Kampf der Geschlechter .....	2
1.1.1 Normalform und Gleichgewicht .....	3
1.1.2 Gemischte Strategien .....	5
1.2 Gleichgewicht, Maxmin und Rationalität .....	7
1.3 Nash-Gleichgewicht .....	9
1.4 Lineare Komplementarität .....	18
1.4.1 Äquivalente Darstellung eines Gleichgewichts .....	18
1.4.2 Überführung und Äquivalenzsatz .....	21
1.4.3 Das Abzählen der Gleichgewichte .....	25
1.4.4 Entartete Lösungen .....	29
1.4.5 Gleichgewichte in symbolischer Form .....	31
1.5 Schlußbemerkungen .....	33
1.5.1 Rechenzeiten und obere Grenzen .....	33
1.5.2 Entartete Spiele .....	35
1.6 Anregungen .....	37
<b>2. Inspektionsspiele</b> .....	41
2.1 Kontrolle mehrerer Standorte .....	41
2.1.1 Das Modell .....	42
2.1.2 Das Bimatrixspiel .....	43
2.1.3 Lösungen mit <i>Mathematica</i> .....	44
2.1.4 Wahrscheinlichkeiten müssen größer oder gleich Null sein .....	47
2.1.5 Formalitäten .....	50
2.1.6 Legales Verhalten und Schlußbemerkungen .....	50
2.2 Periodische Inspektionen .....	52
2.2.1 Das Modell .....	52
2.2.2 Das Bimatrixspiel .....	54
2.2.3 Lösungen mit <i>Mathematica</i> .....	55
2.2.4 Wahrscheinlichkeiten müssen kleiner oder gleich eins sein .....	58
2.2.5 Legales Verhalten .....	63
2.3 Ein sequentielles Spiel .....	63

2.4	Anregungen .....	69
<b>3.</b>	<b>Evolutionsspiele</b> .....	<b>71</b>
3.1	Symmetrische Spiele .....	71
3.2	Evolutionsstabilität .....	74
3.2.1	Falke gegen Taube .....	74
3.2.2	Ein Kinderspiel .....	78
3.2.3	Negative Definitheit .....	80
3.2.4	Das Haigh'sche Kriterium .....	81
3.2.5	Hinreichend UND notwendig .....	83
3.2.6	Einschüchterer und Vergelter .....	85
3.2.7	Zermürbung .....	88
3.2.8	Asymmetrische Konflikte .....	93
3.3	Verhaltensdynamik .....	94
3.3.1	Ein dynamisches System .....	95
3.3.2	Evolutions- und dynamische Stabilität .....	97
3.3.3	Beispiel und Gegenbeispiel .....	100
3.3.4	Aus einer ESS wird ein Grenzyklus .....	102
3.4	Anregungen .....	105
<b>4.</b>	<b>Perfektes Gleichgewicht</b> .....	<b>109</b>
4.1	Spiele in extensiver Form .....	109
4.2	Irren ist menschlich .....	113
4.3	Matrixspiele (Teil I) .....	116
4.3.1	Maxmin-Strategien und Nash-Gleichgewicht .....	117
4.3.2	Maxmin-Strategien und lineare Optimierung .....	118
4.3.3	Gleichgewichte und reine Strategien .....	120
4.4	Dominanz .....	125
4.4.1	Ein Algorithmus .....	129
4.4.2	Iterative Eliminierung .....	131
4.5	Perfektheit .....	134
4.5.1	Vorbehalte .....	135
4.5.2	Versteigerung auf Holländisch .....	139
4.5.3	Ein Wiedersehen mit ESS .....	143
4.6	Anregungen .....	145
<b>5.</b>	<b>Nullsummenspiele</b> .....	<b>147</b>
5.1	Matrixspiele (Teil II) .....	148
5.1.1	Vorbereitungen .....	148
5.1.2	Dualität .....	152
5.2	Das Simplexverfahren .....	155
5.2.1	Grundsätze .....	155
5.2.2	Simplex per Beispiel .....	161
5.3	Angriff und Verteidigung .....	168
5.4	Kontrolle mehrerer Standorte .....	170

5.5	Spiele um die Zeit .....	175
5.5.1	Ein nichtsequentielles Spiel .....	176
5.5.2	Ein Spiel auf dem Einheitsquadrat .....	178
5.5.3	Ein sequentielles Spiel .....	182
5.6	Zöllner und Schmuggler .....	188
5.6.1	Ein Wachboot .....	189
5.6.2	Zwei Wachboote .....	190
5.7	Poker .....	192
5.8	Anregungen .....	198
<b>A.</b>	<b>Eigensysteme .....</b>	<b>201</b>
<b>B.</b>	<b>Nichtlineare Dynamik .....</b>	<b>203</b>
<b>C.</b>	<b>Andere Algorithmen .....</b>	<b>205</b>
C.1	Lemke und Howson .....	205
C.2	Mangasarian, Avis und Fukuda .....	215
<b>D.</b>	<b>GameTheory‘Bimatrix‘ .....</b>	<b>229</b>
D.1	Funktionen .....	229
D.2	Symbolische Lösungen .....	230
D.3	Die Nash-Komponenten .....	235
	<b>Mathematische Symbole .....</b>	<b>239</b>
	<b>Literatur .....</b>	<b>241</b>
	<b>Sachverzeichnis .....</b>	<b>245</b>