Kneser
Quadratische Formen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Martin Kneser

Quadratische Formen

Neu bearbeitet und herausgegeben
in Zusammenarbeit mit Rudolf Scharlau

Springer

Professor Dr. Martin Kneser
Guldenhagen 5
37085 Göttingen, Deutschland

Professor Dr. Rudolf Scharlau
Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
44221 Dortmund, Deutschland
e-mail: rudolf.scharlau@math.uni-dortmund.de

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Kneser, Martin:
Quadratische Formen / Martin Kneser. Neu bearb. und hrsg. in Zusammenarbeit mit Rudolf Scharlau.- Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Tokio: Springer, 2002
ISBN 978-3-540-64650-1 ISBN 978-3-642-56380-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-56380-5

Mathematics Subject Classification (2000): 11-02, 11E04, 11E81, 11E88, 11E08, 11E12, 11E57, 11E41, 11H55

ISBN 978-3-540-64650-1

Einbandgestaltung: *design&production, Heidelberg*
Satz: Datenerstellung durch R. Scharlau unter Verwendung von LaTeX
Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN 10683216 44/3142ck-5 4 3 2 1 0

Einleitung

Zu den ältesten und wichtigsten Problemen der Zahlentheorie gehört die Lösung diophantischer Gleichungen, also algebraischer Gleichungen in ganzen (oder rationalen) Zahlen. Nach relativ einfach zu behandelnden linearen Gleichungen (oder allgemeiner Systemen) liegt es nahe, quadratische Gleichungen zu betrachten, insbesondere Gleichungen der Gestalt

$$f(x_1, \ldots, x_n) = t\,, \tag{$*$}$$

wo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

eine quadratische Form mit ganzen Koeffizienten a_{ij} ist. Mit solchen Problemen wollen wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen. Die ersten wesentlichen Ergebnisse hierzu stammen von Fermat (1601 - 1665), überwiegend allerdings ohne Beweise, die erst gut 100 Jahre später von Euler und Lagrange geliefert wurden, darunter z.B. die Darstellung natürlicher Zahlen als Summen von zwei bzw. vier ganzen Quadraten. Weitere Ergebnisse stammen von Gauss (Summen von drei Quadraten) und Jacobi (Anzahl der Darstellungen als Summen von vier Quadraten).

Wichtige Fortschritte auf dem Gebiet der quadratischen Probleme verdanken wir dann Hermann Minkowski. Im Jahr 1881 hatte die Pariser Akademie als Preisthema das Problem der Zerlegung ganzer Zahlen in eine Summe von fünf Quadraten gestellt, ohne zu bemerken, daß der angesehene englische Mathematiker Henry J.S. Smith bereits 1868 in den Proceedings of the Royal Society of London einen wesentlichen Beitrag zur Lösung des Problems veröffentlicht hatte. Minkowski geht in seiner (als siebzehnjähriger Student geschriebenen!) Preisarbeit weit über das gestellte Thema hinaus und erhält –wie auch Smith– den vollen Preis zuerkannt, obwohl seine Arbeit aus Zeitnot nicht wie verlangt in französischer Sprache abgefasst war. Mit der Preisarbeit und der bald danach in Königsberg vorgelegten Inauguraldissertation hat Minkowski die Theorie der ganzzahligen quadratischen Formen in beliebig vielen Variablen begründet.

Doch zurück zu unserer Gleichung $(*)$. Notwendig für ihre Lösbarkeit ist es offenbar, daß die entsprechende Kongruenz

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv t \bmod m\,, \tag{$**$}$$

für jeden Modul m eine Lösung besitzt, und daß t das richtige Vorzeichen hat, falls f definit ist. Manche der erwähnten klassischen Resultate besagen gerade, daß diese Bedingungen in den behandelten Fällen auch hinreichend sind. Das ist aber durchaus nicht immer so. Hier war es Helmut Hasse, der

1921 in seiner Dissertation bemerkte, daß man zweckmäßigerweise die Henselschen p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ heranzieht und zunächst auf Ganzzahligkeit verzichtet. Er beweist dann den "Satz von Minkowski und Hasse", wonach die Gleichung $(*)$ genau dann in rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ lösbar ist, wenn sie es für jede Primzahl p in $\mathbb{Q}_p$ und außerdem in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist.

Die entsprechende Aussage mit Forderung der Ganzzahligkeit, also mit $\mathbb{Z}$ statt $\mathbb{Q}$ und den ganzen p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ statt $\mathbb{Q}_p$, ist, wie schon gesagt, nicht allgemein richtig, da die Lösbarkeit der Kongruenz $(**)$ für alle Moduln m gleichbedeutend ist mit der Lösbarkeit der Gleichung $(*)$ in $\mathbb{Z}_p$ für alle Primzahlen p. An die Stelle dieser Aussage tritt der schwierigere aber fundamentale "Satz von Minkowski und Siegel" aus dem Jahr 1935, für dessen Formulierung hier auf Kapitel X verwiesen sei. Sein Beweis (mit Hilfe von Adelen und Haarschem Maß) ist eines der Hauptziele dieser Ausarbeitung, die grob gesprochen aus zwei Teilen besteht: Einem algebraischen (Kap. I - V), in dem der Grundring allgemein oder nur durch strukturelle Vorgaben eingeschränkt ist, und einem arithmetischen (Kap. VI - X) mit Grundring $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$. Während wir in diesem zweiten Teil darauf verzichten, allgemeinere Grundringe, etwa algebraische Zahlkörper zu betrachten, haben wir im ersten Teil darauf geachtet, die Voraussetzungen so allgemein zu halten, wie dies ohne Komplikationen möglich ist. Insbesondere haben wir stets versucht, den Fall der Charakteristik 2 mit einzubeziehen, was sich gelegentlich, z.B. bei dyadischen Rechnungen auszahlt. Schließlich verwenden wir wie Ernst Witt in seiner Habilitationsschrift von 1936 die geometrische Sprache und betrachten quadratische Formen als Funktionen auf Moduln, die zwar mit symmetrischen Bilinearformen eng zusammenhängen, in Charakteristik 2 aber durchaus von ihnen verschieden sind (§§ 1, 2).

Aus dem hier skizzierten Gebiet der Arithmetik quadratischer Formen habe ich mehrfach Vorlesungen gehalten. Eine von diesen wurde 1973/74 ausgearbeitet, später durch Anmerkungen historischer oder sachlich-ergänzender Art erweitert und im einzelnen überarbeitet. Großer Verdienst am Zustandekommen der jetzt vorliegenden Neufassung gebührt Herrn Rudolf Scharlau, der mich tatkräftig unterstützt hat und dem ich herzlich dafür danke. Mein Dank gilt dem Springer-Verlag nicht nur für seine gewohnt hervorragende Arbeit, sondern auch für die erwiesene große Geduld.

Schließlich ein persönliches Wort. Es ist ziemlich genau 50 Jahre her, daß ich als junger Assistent nach Münster kam, bald an Eichlers Seminar teilnahm, wo gerade die neuesten Ergebnisse aus seinem Buch *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen* besprochen wurden. Da ich im Institut mein Arbeitszimmer mit Eichler teilte, hatte ich die besten Möglichkeiten, von einer Seminarsitzung zur nächsten die offen gebliebenen Fragen zu klären und so die quadratischen Formen an der Quelle zu studieren.

Göttingen, im Dezember 2001
Martin Kneser

Inhaltsverzeichnis

Einleitung V

I. Bilineare und quadratische Formen 1
1 Symmetrische Bilinearformen 1
2 Quadratische Formen 7
3 Die orthogonale Gruppe und der Satz von Witt 11
4 Lokale Ringe 15

II. Clifford–Algebren 21
5 Konstruktion und wichtige Eigenschaften 21
6 Räume kleiner Dimension 27
7 Zentren von Clifford–Algebren 32
8 Spingruppe und Spinornorm 36

III. Witt-Gruppe und Invarianten quadratischer Formen 41
9 Die Wittsche Gruppe 41
10 Diskriminante und Arf-Invariante 42
11 Die Invarianten von Minkowski, Hasse und Witt 44

IV. Quadratische Formen über endlichen Körpern 51
12 Klassifikation 51
13 Anzahlbestimmungen 53

V. Quadratische Formen über Bewertungsringen 57
14 Hauptidealringe 57
15 Bewertungsringe 62
16 Lokale Körper 66

VI. Quadratische Formen über $\mathbf{Q}$ 71
17 Die Witt-Gruppe von $\mathbf{Q}$ 71
18 Das quadratische Reziprozitätsgesetz 74
19 Der Satz von Minkowski und Hasse 78

VII. Quadratische Formen über Z 83
20 Reduktionstheorie 83
21 Klassen und Geschlechter 86
22 Darstellungen über Z 88

VIII. Approximationssätze und indefinite Formen 93
23 Schwache Approximation 93
24 Starke Approximation 97
25 Spinorgeschlechter 103
26 Unimodulare Gitter 106

IX. Nachbargitter und definite Formen 111
27 Unzerlegbare Gitter 111
28 Bestimmung von Klassen in einem Geschlecht 113
29 Darstellungen durch eine einzelne Form 119

X. Der Satz von Minkowski und Siegel 125
30 Klassen und Geschlechter von Darstellungen 125
31 Adele und Haarsches Maß 130
32 Darstellungsanzahlen in einem Geschlecht 136
33 Der Satz von Minkowski und Siegel 140
34 Schluß des Beweises 146
35 Einige Beispiele und Anwendungen 154

Literatur 161

Index 163