Springer-Lehrbuch

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Aslak Tveito Ragnar Winther

Einführung in partielle Differentialgleichungen

Ein numerischer Zugang

Übersetzt von Hanna Peywand Kiani

Springer

Professor Dr. Aslak Tveito
Professor Dr. Ragnar Winther
Universität Oslo
Institut für Informatik
Boks 1072 Blindern
0216 Oslo
Norwegen
e-mail: aslak/rwinther@ifi.uio.no

Übersetzerin
Dr. Hanna Peywand Kiani
Heinestraße 43
22880 Wedel
Deutschland
e-mail: kiani@t-online.de

Mathematics Subject Classification (2000): 65-01, 35-01

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Tveito, Aslak:
Einführung in partielle Differentialgleichungen: ein numerischer Zugang / Aslak Tveito; Ragnar Winther. Aus dem Amerikan. übers. von H. Kiani. - Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Tokio: Springer, 2002
(Springer-Lehrbuch)
ISBN 978-3-540-42404-8   ISBN 978-3-642-56227-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-56227-3

Übersetzung der englischen Ausgabe: Introduction to Partial Differential Equations. A Computational Approach. A. Tveito, R. Winther, Texts in Applied Mathematics, Vol. 29, Springer-Verlag Heidelberg 1998

ISBN 978-3-540-42404-8

http://www.springer.de

Satz: Datenerstellung durch die Übersetzerin unter Verwendung eines TEX-Makropakets
Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier   SPIN: 10847470   46/3142ck - 5 4 3 2 1 0

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Wir freuen uns sehr, daß unser Lehrbuch über partielle Differentialgleichungen ins Deutsche übersetzt wurde. Soweit wir es beurteilen können, hat die Übersetzerin, Frau Dr. Hanna Peywand Kiani, sehr gute Arbeit geleistet. Sie hat darüber hinaus auch eine Reihe von Fehlern in der englischen Ausgabe korrigiert. Weiterhin bedanken wir uns beim Springer-Verlag und insbesondere Dr. Martin Peters für die erfolgreiche und angenehme Zusammenarbeit. Schließlich bedanken wir uns bei Dr. Bjørn Frederik Nielsen, der unser lokaler Experte für die Feinheiten der Sprache war, die wir eigentlich in der Schule lernen sollten.

Wir wünschen unseren deutschsprachigen Lesern viel Erfolg und heißen sie in der wunderbaren Welt der partiellen Differentialgleichungen willkommen.

Aslak Tveito
Ragnar Winther

Vorwort

"Man kann das Ausmaß, in dem die Verfügbarkeit schneller Rechner mit großen Speicherkapazitäten der modernen angewandten Mathematik Form und Antrieb gegeben hat, überhaupt nicht überschätzen. Der Einfluß der Computer auf die angewandte als auch auf die reine Mathematik ist mit der Rolle der Teleskope in der Astronomie oder der der Mikroskope in der Biologie vergleichbar."

— *Peter Lax, Siam Rev. Vol. 31 No. 4*

Herzlichen Glückwunsch! Sie haben sich für das Studium partieller Differentialgleichungen entschieden. Damit haben Sie eine weise Entscheidung getroffen; denn die Gesetze der Natur sind in der Sprache der partiellen Differentialgleichungen geschrieben. Daher werden partielle Differentialgleichungen in fast allen Gebieten der Naturwissenschaften und der Technik zur Modellierung verwendet. In diesem Buch wollen wir dem Leser einen Einblick in das umfangreiche Gebiet der partiellen Differentialgleichungen geben. Es handelt sich um ein einführendes Buch, in dem lediglich die Kenntnis elementarer Analysis und linearer Algebra vorausgesetzt wird. Eine gewisse Erfahrung im Umgang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen ist allerdings von Vorteil.

Einführende Kurse über partielle Differentialgleichungen werden in unterschiedlicher Form überall auf der Welt angeboten. Üblicherweise werden zunächst analytische Techniken zusammengetragen, mit denen einige einfache Modellaufgaben exakt gelöst werden können. Nur wer sich anschließend in anderen Vorlesungen noch mit numerischen Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen befaßt, wird die Reichweite partieller Differentialgleichungen jenseits von Papier und Bleistift kennenlernen.

Unser Zugang zu den partiellen Differentialgleichungen ist ein anderer: Wir führen analytische und numerische Methoden nebeneinander im selben Buch und damit im selben Kurs ein. Der Hauptgrund für diese Vorgehensweise ist, dass Computer, die zunächst nur Wissenschaftler bei der Lösung partieller Differentialgleichungen unterstützen sollten, inzwischen allgemein zur Verfügung stehen und bei allen praktischen Anwendungen partieller Differentialgleichungen eingesetzt werden. Daher muss ein moderner Zugang zu diesem Thema auch numerische Methoden zum Einsatz auf Computern berücksichtigen. Diese Methoden beruhen allerdings oft auf tieferem analytischen Verständnis partieller Differentialgleichungen, so dass auch die theoretischen Aspekte nicht vernachlässigt werden dürfen. Wir bemühen uns daher um ein gesundes Gleichgewicht zwischen Theorie und Numerik.

Ein Vorteil der Einführung numerischer Techniken ist die Möglichkeit, mehr als beim analytischen Zugang auch auf nichtlineare Probleme eingehen zu können. Wir betrachten neben den gängigen linearen Modellen auch einige nichtlineare Gleichungen. Insbesondere diskutieren wir Reaktions-Diffusionsgleichungen. Diese Gleichungen sind weitverbreitete und wichtige Modelle in zahlreichen naturwissenschaftlichen Anwendungsfeldern.

Unser Ziel ist nicht die Diskussion der Vorzüge verschiedener numerischer Verfahren. In den Fachzeitschriften findet man viele Artikel, die sich mit dem Vergleich verschiedener numerischer Methoden befassen. Wir werden im vorliegenden Buch nicht auf dieses Thema eingehen. Vielmehr wollen wir aufzeigen, dass numerische Verfahren einfach handzuhaben sind und oft sehr gute Ergebnisse liefern, ohne jedoch darauf einzugehen, dass geringfügige Änderungen der Verfahren zu noch besseren Resultaten führen können. Wir werden solche Themen zwar kurz streifen aber an keiner Stelle in größerem Rahmen behandeln. Dieser Stoff gehört eindeutig in das Gebiet der Numerischen Analysis und sollte gesondert untersucht werden. In diesem Buch werden wir uns stets bemühen, das jeweils einfachste in Frage kommende numerische Verfahren zu benutzen. Unsere Auswahl sollte aber keineswegs als Befürwortung eines bestimmten Verfahrens gegenüber eines anderen interpretiert werden. Die Verfahren werden tatsächlich ihrer Einfachheit wegen gewählt.

Einfachheit ist auch der Grund, weshalb wir uns ausschließlich mit der Methode der finiten Differenzen befassen. Wir hätten dieses Buch ebenso gut auf der Methode der finiten Elemente aufbauen können, die aus der Sicht des Anwenders sicherlich sogar über ein höheres Potential verfügen. Die finite Element Methoden sind aber etwas schwerer zu verstehen als die entsprechenden finite Differenzenmethoden.

Wir haben versucht, den Stoff in einfacher Gangart zu präsentieren, indem wir sowohl die Ideen als auch die Details der Herleitungen ausführlich erklärt haben. Dies gilt insbesondere für die ersten Kapitel. In den späteren Kapiteln wird etwas weniger ausführlich erklärt, und einige Zwischenschritte werden dem Leser überlassen. Das Buch enthält viele Übungsaufgaben, von sehr einfachen bis zu anspruchsvollen. Ein Teil der Übungsaufgaben erfordert etwas Programmierarbeit und einige Experimente auf einem Computer. Wir empfehlen Studierenden dringend, diese Abschnitte nicht zu überspringen. Zusätzlich gibt es einige "Projekte". Diese sollen zum einen hier benötigte Ergebnisse aus anderen Kursen wieder auffrischen. Zum anderen sollen sie den hier entwickelten Stoff vertiefen helfen.

Angesicht der Tatsache, dass wir sowohl numerische als auch analytische Techniken einführen, befassen wir uns nur wenig mit Modellierungsfragen. Selbstverständlich ist die Aufstellung von Modellen, die auf partiellen Differentialgleichungen beruhen, ein wichtiges Gebiet. Da es sich dabei aber um ein sehr umfangreiches Thema handelt, können wir hier nicht detailliert auf die Entwicklung von Modellen eingehen.

Die ersten sieben Kapitel des Buches enthalten einen elementaren Kurs über partielle Differentialgleichungen. Themen wie die Trennung der Veränderlichen, Energieargumente, Maximumprinzipien und finite Differenzenmethoden werden für die drei grundlegenden linearen partiellen Differentialgleichungen diskutiert: Für sie Wärmeleitungsgleichung, die Wellengleichung und die Poisson–Gleichung. In den Kapiteln 8–10 werden einige theoretischere Fragen im Zusammenhang mit der Methode der Trennung der Veränderlichen und der Konvergenz von Fourierreihen behandelt. Im Kapitel 11 werden nichtlineare partielle Differentialgleichungen eingeführt. Insbesondere wollen wir zeigen, wie einfach sich Methoden der finiten Differenzen selbst für analytisch schwer lösbare nichtlineare Probleme einsetzen lassen. Im Kapitel 12 geben wir eine kurze Einführung in die Fouriertransformation und deren Anwendung auf partielle Differentialgleichungen.

Einige Übungsaufgaben sind kleine Computer–Projekte, die etwas Programmierarbeit erfordern. Hierbei kann jede Programmiersprache verwendet werden. Eventuell sind Beispiele aus unserer Webseite, http://www.ifi.uio.no/~pde/, als Starthilfe nützlich. Man findet dort etwas Matlab Code und einige einfache Java Applets.

Danksagungen

Es ist uns eine besondere Freude, an dieser Stelle unseren Freunden und Kollegen für die große Hilfe und zahlreiche Diskussionen im Laufe dieses Buchprojektes danken zu können. Insbesondere danken wir Bent Birkeland und Tom Lyche, die beide an der Entwicklung der grundlegenden Ideen für das Gerüst dieses Buches beteiligt waren. Wir bedanken uns auch bei Are Magnus Bruaset, Helge Holden, Kenneth Hvistendahl Karlsen, Jan Olav Langseth, Hans Petter Langtangen, Glenn Terje Lines, Knut Mørken, Bjørn Fredrik Nielsen, Gunnar Olsen, Klas Samuelsson, Achim Schroll, Wen Shen, Jan Søreng, und Åsmund Ødegård, die jeweils Teile des Manuskriptes gelesen haben. Schließlich möchten wir Hans Birkeland, Truls Flatberg, Roger Hansen, Thomas Skjønhaug und Fredrik Tyvand danken, die uns den größten Teil der Editionsarbeit in hervorragender Weise abgenommen haben.

Oslo, Norway, April 1998.

Aslak Tveito
Ragnar Winther

Inhaltsverzeichnis