



Dieter M. Imboden  
Sabine Koch

# Systemanalyse

Einführung  
in die mathematische  
Modellierung  
natürlicher Systeme

mit 84 Abbildungen und 8 Tabellen  
Cartoons von Nikolas Stürchler

 Springer

PROFESSOR DR. DIETER M. IMBODEN  
ETH Zürich  
Umweltphysik  
Departement Umweltnaturwissenschaften  
CH-8092 Zürich  
Schweiz

DR. SABINE KOCH  
ETH Zürich  
Umweltphysik  
Departement Umweltnaturwissenschaften  
CH-8092 Zürich  
Schweiz

### 3. korrigierter Nachdruck der 1. Auflage 2008

ISBN 978-3-642-62878-8 ISBN 978-3-642-55667-8 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-55667-8

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;  
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2003

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 2003

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Herstellung: A. Oelschläger

Gedruckt auf säurefreiem Papier 30/2132 AO 5 4 3 2 1

# Vorwort

Buchstäblich ein Sprung ins kalte (See-)wasser machte den Erstautoren (DI) vor über dreissig Jahren zu einem angewandten Umweltwissenschaftler. Angeregt durch die damals neuen Arbeiten des Limnologen Richard Vollenweider über das Problem der Eutrophierung (Überdüngung) von Seen fragte sich der theoretische Physiker, ob die von Vollenweider empirisch gefundenen Zusammenhänge zwischen Phosphorbelastung, Seetiefe und Seezustand nicht durch ein mathematisches Modell zu beschreiben wären. Das eigens entwickelte Zweibox-Modell (Imboden 1973), dessen Spuren auch in diesem Buch anzutreffen sind, schaffte das anvisierte Ziel verblüffend gut und begründete eine lange Liebe zur Modellierung von Umweltsystemen.

Als viele Jahre später die Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) in Zürich 1987 einen vollständig neuen Studiengang mit dem programmatischen Titel „Umweltnaturwissenschaften“ einführte, bestand ein wichtiges Anliegen darin, die damals oft noch als „weich“ empfundene Umweltwissenschaft mit einem soliden quantitativen Unterbau zu versehen. So entstanden die Vorlesung Systemanalyse und später dieses Buch.

Die Zweitautorin (SK) hat in Bayreuth Geoökologie studiert, ein Studiengang, der 1978 mit ähnlichen Ansprüchen gegründet worden war wie später die Umweltnaturwissenschaften an der ETH Zürich. Während ihres Promotionsstudiums an der ETH im Bereich der Bodenwissenschaften war sie besonders von dem konsequent quantitativen Ansatz in ihrer Lieblingsvorlesung „Systemanalyse“ fasziniert. Später leitete sie während einiger Jahre den Übungsbetrieb zu dieser Vorlesung.

Beide Autoren verbindet das Anliegen, auch jenen Studierenden, welche die Schule mit einem tiefsitzenden Horror vor der Mathematik und Physik verlassen, die Nützlichkeit der quantitativ-analytischen Werkzeuge zu vermitteln, ohne dabei zu vergessen, dass diese Betrachtung andere, gegenständlichere Auseinandersetzungen mit der Natur nicht ersetzen können. Wir hoffen, Leser und Leserin lassen sich von unserer Begeisterung anstecken.

Der Comics-Zeichner Nikolas Stürchler, in seinem richtigen Beruf Jurist, hat uns mit seinem vorwitzigen Dang, dem zerstreuten Professor Dong und dem klugen Hund Ding geholfen, den Stoff auch von der lebensfreudigen und sportlichen Seite anzugehen. Vielleicht scheint unser gelegentliches Augenzwinkern über die sonst so ernste Mathematik auch an anderen Stellen durch.

Ein solches Buch wäre nicht zu realisieren ohne eine ganze „Werkstatt“ von kompetenten Personen im Hintergrund. Besonders danken möchten wir Cécile Haussener Keller und Anna Schuler für ihren unermüdlichen Einsatz beim Schreiben des Textes, Thomas Siller, Paul Büttner, Michael Kost und Tobias Oetiker bei der Gestaltung der Figuren und des Layouts sowie Sibyl Imboden für ihr sorgfältiges Lektorat. Und schließlich gilt ein besonderer Dank all unseren Studierenden an der ETH, welche uns sowohl durch ihre aufmunternden Rückmeldungen als auch mit ihrer aufbauenden Kritik zu einer ständigen Verbesserung der Vorlesung ermuntert und damit wesentlich zum Gelingen dieses Werkes beigetragen haben.

Im November 2002

Dieter Imboden, Zürich  
Sabine Koch, Tübingen

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Systemanalyse . . . . .	2
1.2 Was ist ein System? . . . . .	4
1.3 Was ist ein Modell? . . . . .	7
1.4 Modellbildung . . . . .	9
1.5 Fragen und Aufgaben . . . . .	13
<b>2 Mathematische Modelle</b>	<b>15</b>
2.1 Vom System zum Modell . . . . .	15
2.2 Statische Modelle . . . . .	16
2.3 Dynamische Modelle . . . . .	23
2.4 Zeitlich diskrete Modelle . . . . .	26
2.5 Räumlich kontinuierliche Modelle . . . . .	27
2.6 Stochastische Modelle . . . . .	27
2.7 Fragen und Aufgaben . . . . .	31
<b>3 Statische Modelle</b>	<b>33</b>
3.1 Gleichgewichtsverteilung zwischen Wasser und Luft . . . . .	33
3.2 Gleichgewichtsverteilung zwischen Wasser und Sediment . . . . .	35
3.3 Mehrdimensionale statische Modelle . . . . .	37
3.4 Fragen und Aufgaben . . . . .	39
<b>4 Lineare eindimensionale Modelle</b>	<b>43</b>
4.1 Bilanzgleichung . . . . .	44
4.2 Konstante Koeffizienten . . . . .	47
4.3 Modelle mit zeitabhängigen Koeffizienten . . . . .	59
4.4 Fragen und Aufgaben . . . . .	76
<b>5 Lineare mehrdimensionale Modelle</b>	<b>81</b>
5.1 Zweidimensionale Modelle . . . . .	82
5.2 Mehrdimensionale Modelle . . . . .	115
5.3 Fragen und Aufgaben . . . . .	122

<b>6</b>	<b>Nichtlineare Modelle</b>	<b>127</b>
6.1	Einbox-Modelle . . . . .	128
6.2	Mehrdimensionale Modelle . . . . .	146
6.3	Fragen und Aufgaben . . . . .	163
<b>7</b>	<b>Zeitdiskrete Modelle</b>	<b>167</b>
7.1	Zeitdiskrete Modelle mit einer Variablen . . . . .	167
7.2	Zeitdiskrete Modelle mit mehreren Variablen . . . . .	182
7.3	Fragen und Aufgaben . . . . .	188
<b>8</b>	<b>Modelle in Raum und Zeit</b>	<b>191</b>
8.1	Mischung und Transformation . . . . .	191
8.2	Advektion, Diffusion, Austausch . . . . .	194
8.3	Stationäre Modelle . . . . .	205
8.4	Zeitabhängige Lösungen . . . . .	216
8.5	Fragen und Aufgaben . . . . .	224
<b>A</b>	<b>Symbolliste</b>	<b>231</b>
<b>B</b>	<b>Dimensionen und Einheiten</b>	<b>235</b>
B.1	Dimensionen . . . . .	235
B.2	Einheiten . . . . .	235
<b>C</b>	<b>Formelsammlung</b>	<b>237</b>
C.1	Lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung . . . . .	237
C.2	System von 2 linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	238
C.3	Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung . . . . .	239
C.4	Lineare Differentialgleichungen mit imaginären Eigenwerten	241
<b>D</b>	<b>Eigenwerte</b>	<b>243</b>
D.1	Das $n$ -dimensionale System . . . . .	243
D.2	Das zweidimensionale System . . . . .	244
<b>E</b>	<b>Zeitabhängige Diffusionsgleichung</b>	<b>247</b>
E.1	Normal- oder Gauss-Verteilung . . . . .	247
E.2	Error-Funktion . . . . .	248
E.3	Lineares Superpositionsprinzip . . . . .	248
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>251</b>
	<b>Index</b>	<b>253</b>