

# Arbeitsbuch Grundwissen Mathematikstudium

Martin Brokate   Norbert Henze   Frank Hettlich   Andreas Meister  
Gabriela Schranz-Kirlinger   Thomas Sonar

# Arbeitsbuch Grundwissen Mathematikstudium

Höhere Analysis, Numerik und Stochastik

Aufgaben, Hinweise, Lösungen und Lösungswege

unter Mitwirkung von Daniel Rademacher

## **Autoren**

Martin Brokate, TU München Zentrum Mathematik (M10), Garching, brokate@ma.tum.de

Norbert Henze, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), norbert.henze@kit.edu

Frank Hettlich, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), frank.hettlich@kit.edu

Andreas Meister, Universität Kassel, meister@mathematik.uni-kassel.de

Gabriela Schranz-Kirlinger, TU Wien, g.schranz-kirlinger@tuwien.ac.at

Thomas Sonar, TU Braunschweig FB 1 Mathematik und Informatik, Braunschweig, t.sonar@tu-bs.de

ISBN 978-3-642-54945-8 ISBN 978-3-642-54946-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-54946-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Änderungen.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton

Satz: EDV-Beratung Frank Herweg, Leutershausen

Einbandabbildung: © Jos Leys

Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

# Vorbemerkungen

Auf verschiedenlichen Wunsch bieten wir alle Aufgaben des Buchs Brokate et al., *Grundwissen Mathematikstudium – Höhere Analysis, Numerik und Stochastik* mit Hinweisen, Lösungen und Lösungswegen als gedrucktes Buch. Die Inhalte des Buchs stehen als PDF-Dateien auch auf der Website **matheweb** zur Verfügung.

Die Aufgaben gliedern sich in drei Kategorien: Anhand der *Verständnisfragen* können Sie prüfen, ob Sie die Begriffe und zentralen Aussagen verstanden haben, mit den *Rechenaufgaben* üben Sie Ihre technischen Fertigkeiten und die Beweisaufgaben geben Ihnen Gelegenheit, zu lernen, wie man Beweise findet und führt.

Ein Punktesystem unterscheidet leichte Aufgaben ●, mittelschwere ●● und anspruchsvolle ●●● Aufgaben. Die Lösungshinweise helfen Ihnen, falls Sie bei einer Aufgabe partout nicht weiterkommen. Für einen optimalen Lernerfolg schlagen Sie die Lösungen und Lösungswege bitte erst nach, wenn Sie selber zu einer Lösung gekommen sind.

Verweise auf Seiten, Formeln, Abschnitte und Kapitel beziehen sich auf das Buch *Grundwissen Mathematikstudium – Höhere Analysis, Numerik und Stochastik* von Brokate et al.

Wir wünschen Ihnen viel Freude und Spaß mit diesem Arbeitsbuch und in Ihrem Studium.

Der Verlag und die Autoren

# Inhaltsverzeichnis

|   |           |  |            |
|---|-----------|--|------------|
| <b>Kapitel 2: Lineare Differenzialgleichungen – Systeme und Gleichungen höherer Ordnung</b>           | <b>1</b>  | <b>Kapitel 9: Fredholm-Gleichungen – kompakte Störungen der Identität</b>                  | <b>69</b>  |
| Aufgaben . . . . .  | 1         | Aufgaben . . . . .   | 69         |
| Hinweise . . . . .  | 3         | Hinweise . . . . .   | 70         |
| Lösungen . . . . .  | 4         | Lösungen . . . . .   | 70         |
| Lösungswege . . . . .   | 5         | Lösungswege . . . . .  | 71         |
| <b>Kapitel 3: Randwertprobleme und nichtlineare Differenzialgleichungen – Funktionen sind gesucht</b> | <b>13</b> | <b>Kapitel 10: Hilberträume – fast wie im Anschauungsraum</b>                              | <b>76</b>  |
| Aufgaben . . . . .  | 13        | Aufgaben . . . . .   | 76         |
| Hinweise . . . . .  | 14        | Hinweise . . . . .   | 77         |
| Lösungen . . . . .  | 15        | Lösungen . . . . .   | 78         |
| Lösungswege . . . . .   | 16        | Lösungswege . . . . .  | 78         |
| <b>Kapitel 4: Qualitative Theorie – jenseits von analytischen und mehr als numerische Lösungen</b>    | <b>24</b> | <b>Kapitel 11: Warum Numerische Mathematik? – Modellierung, Simulation und Optimierung</b> | <b>85</b>  |
| Aufgaben . . . . .  | 24        | Aufgaben . . . . .   | 85         |
| Hinweise . . . . .  | 25        | Hinweise . . . . .   | 86         |
| Lösungen . . . . .  | 26        | Lösungen . . . . .   | 86         |
| Lösungswege . . . . .   | 26        | Lösungswege . . . . .  | 86         |
| <b>Kapitel 5: Funktionentheorie – Analysis im Komplexen</b>   | <b>33</b> | <b>Kapitel 12: Interpolation – Splines und mehr</b>  | <b>89</b>  |
| Aufgaben . . . . .  | 33        | Aufgaben . . . . .   | 89         |
| Hinweise . . . . .  | 34        | Hinweise . . . . .   | 90         |
| Lösungen . . . . .  | 35        | Lösungen . . . . .   | 90         |
| Lösungswege . . . . .   | 36        | Lösungswege . . . . .  | 91         |
| <b>Kapitel 6: Differenzialformen und der allgemeine Satz von Stokes</b>                               | <b>41</b> | <b>Kapitel 13: Quadratur – numerische Integrationsmethoden</b>                             | <b>99</b>  |
| Aufgaben . . . . .  | 41        | Aufgaben . . . . .   | 99         |
| Hinweise . . . . .  | 42        | Hinweise . . . . .   | 100        |
| Lösungen . . . . .  | 42        | Lösungen . . . . .   | 100        |
| Lösungswege . . . . .   | 43        | Lösungswege . . . . .  | 101        |
| <b>Kapitel 7: Grundzüge der Maß- und Integrations- theorie – vom Messen und Mitteln</b>               | <b>47</b> | <b>Kapitel 14: Numerik linearer Gleichungs- systeme – Millionen von Variablen im Griff</b> | <b>104</b> |
| Aufgaben . . . . .  | 47        | Aufgaben . . . . .   | 104        |
| Hinweise . . . . .  | 50        | Hinweise . . . . .   | 105        |
| Lösungen . . . . .  | 51        | Lösungen . . . . .   | 105        |
| Lösungswege . . . . .   | 52        | Lösungswege . . . . .  | 106        |
| <b>Kapitel 8: Lineare Funktionalanalysis – Operatoren statt Matrizen</b>                              | <b>60</b> | <b>Kapitel 15: Numerische Eigenwertberechnung – Einschließen und Approximieren</b>         | <b>110</b> |
| Aufgaben . . . . .  | 60        | Aufgaben . . . . .   | 110        |
| Hinweise . . . . .  | 61        | Hinweise . . . . .   | 111        |
| Lösungen . . . . .  | 62        | Lösungen . . . . .   | 111        |
| Lösungswege . . . . .   | 62        | Lösungswege . . . . .  | 112        |

|   |            |   |            |
|---|------------|---|------------|
| <b>Kapitel 16: Lineare Ausgleichsprobleme –<br/>im Mittel das Beste</b>                                     | <b>115</b> | Lösungen . . . . .  | 165        |
| Aufgaben . . . . .  | 115        | Lösungswege . . . . .   | 166        |
| Hinweise . . . . .  | 116        | <b>Kapitel 22: Stetige Verteilungen und allgemeine<br/>Betrachtungen – jetzt wird es analytisch</b>   | <b>179</b> |
| Lösungen . . . . .  | 116        | Aufgaben . . . . .  | 179        |
| Lösungswege . . . . .   | 117        | Hinweise . . . . .  | 183        |
| <b>Kapitel 17: Nichtlineare Gleichungen und<br/>Systeme – numerisch gelöst</b>                              | <b>121</b> | Lösungen . . . . .  | 184        |
| Aufgaben . . . . .  | 121        | Lösungswege . . . . .   | 185        |
| Hinweise . . . . .  | 122        | <b>Kapitel 23: Konvergenzbegriffe und Grenzwert-<br/>sätze – Stochastik für große Stichproben</b>     | <b>200</b> |
| Lösungen . . . . .  | 123        | Aufgaben . . . . .  | 200        |
| Lösungswege . . . . .   | 123        | Hinweise . . . . .  | 203        |
| <b>Kapitel 18: Numerik gewöhnlicher Differenzial-<br/>gleichungen – Schritt für Schritt zur Trajektorie</b> | <b>128</b> | Lösungen . . . . .  | 204        |
| Aufgaben . . . . .  | 128        | Lösungswege . . . . .   | 205        |
| Hinweise . . . . .  | 129        | <b>Kapitel 24: Grundlagen der Mathematischen<br/>Statistik – vom Schätzen und Testen</b>              | <b>216</b> |
| Lösungen . . . . .  | 130        | Aufgaben . . . . .  | 216        |
| Lösungswege . . . . .   | 130        | Hinweise . . . . .  | 220        |
| <b>Kapitel 19: Wahrscheinlichkeitsräume – Modelle<br/>für stochastische Vorgänge</b>                        | <b>136</b> | Lösungen . . . . .  | 221        |
| Aufgaben . . . . .  | 136        | Lösungswege . . . . .   | 222        |
| Hinweise . . . . .  | 139        | <b>Kapitel 20: Bedingte Wahrscheinlichkeit und<br/>Unabhängigkeit – Meister Zufall hängt (oft) ab</b> | <b>146</b> |
| Lösungen . . . . .  | 140        | Aufgaben . . . . .  | 146        |
| Lösungswege . . . . .   | 140        | Hinweise . . . . .  | 149        |
| <b>Kapitel 20: Bedingte Wahrscheinlichkeit und<br/>Unabhängigkeit – Meister Zufall hängt (oft) ab</b>       | <b>146</b> | Lösungen . . . . .  | 150        |
| Aufgaben . . . . .  | 146        | Lösungswege . . . . .   | 151        |
| Hinweise . . . . .  | 149        | <b>Kapitel 21: Diskrete Verteilungsmodelle – wenn<br/>der Zufall zählt</b>                            | <b>160</b> |
| Lösungen . . . . .  | 150        | Aufgaben . . . . .  | 160        |
| Lösungswege . . . . .   | 151        | Hinweise . . . . .  | 164        |