
Finite-Elemente-Methode

Peter Steinke

Finite-Elemente-Methode

Rechnergestützte Einführung

5., bearbeitete und ergänzte Auflage

Professor Dr.-Ing. Peter Steinke
Fachhochschule Münster
Fachbereich Maschinenbau
Stegerwaldstraße 39
48565 Steinfurt
steinke@fh-muenster.de

Die Lernsoftware CALL_for_FEM ist auf der SpringerVieweg Homepage oder direkt unter der Internetadresse <http://www.springer.com/978-3-642-53936-7> zu finden.

ISBN 978-3-642-53936-7 ISBN 978-3-642-53937-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-53937-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004, 2007, 2010, 2012, 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.com)

Vorwort zur fünften Auflage

Die fünfte Auflage ist von zahlreichen Neuerungen und Verbesserungen geprägt. In einem neuen Kapitel werden isoparametrische Scheibenelemente behandelt. Neu ist auch die Beschreibung dynamischer Probleme über das Prinzip von Hamilton. In diesem Rahmen sind die bisher betrachteten Stab- und Balkenprobleme um Scheiben- und Plattenprobleme erweitert worden. Zudem sind weitere Kapitel überarbeitet und neue Übungsbeispiele eingearbeitet worden, die zum besseren Verständnis des Lernstoffes beitragen. In die Lernsoftware „CALL_for_FEM“ sind die im Buch abgeleiteten Algorithmen zur Berechnung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Stab, Balken, Scheibe und Platte integriert worden. Ebenso Programme zur Ermittlung der Knickkräfte und Knickformen von Stab und Balken.

Die Lernsoftware ist auf der SpringerVieweg Homepage unter dem Button „Lernsoftware CALL_for_FEM“ oder direkt unter der Internetadresse:

<http://www.springer.com/978-3-642-53936-7>

zu finden. Die Installation ist mittels eines Installationsprogrammes einfach zu realisieren. „CALL_for_FEM“ (s. Kap. 13 auf der S. 425) besitzt eine menügesteuerte Benutzeroberfläche. So kann die Lernsoftware zum Kennenlernen und besseren Verständnis der FEM effizient genutzt werden. Die Handhabung wird durch eine Hilfefunktion und Videos erleichtert.

Bedanken möchte ich mich bei nachfolgenden Personen, die bei der Anfertigung des Buches oder Lernsoftware unterstützend tätig waren: Dipl.-Ing. Averkamp sowie die wiss. bzw. stud. Hilfskräfte B. Eng. Brüggenkamp, cand.-ing. Söller und cand.-ing. Rehrmann.




Dank gilt auch dem Springer-Verlag, insbesondere Frau Hestermann-Beyerle und Frau Kollmar-Thoni.

Steinfurt, im Januar 2015

Peter Steinke

Hinweise zum Gebrauch dieses Buches

Viele Erweiterungen, Ergänzungen und weiterführende Hilfsmittel des Buches sind als Lernsoftware ausgelagert und über das Internet für den Käufer des Buches herunterladbar (s. Kap. 13.1.1 und 13.1.2 auf der S. 426). Die Hinweise auf diese zusätzlichen Lernmittel werden über drei verschiedene Icons gesteuert, die am Außenrand des Buches dargestellt sind. Ihre Bedeutung ist nachfolgend erläutert:

- Tritt bei der Formulierung von Übungsbeispielen auf, deren Lösungen unter dieser Iconform in „CALL_for_FEM“ zu finden sind (s. Kap. 13.1.3 auf der S. 427). 
- Zeigt an, daß zur Erläuterung und Ergänzung des Buchinhaltes ein Video-Tutorial zur Verfügung steht (s. Kap. 13.1.5 auf der S. 428). 
- Gibt einen Hinweis auf die Lernsoftware, die den Buchinhalt unterstützt, erweitert und vertieft (s. Kap. 13.1.4 auf der S. 427). 

Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Buch samt der beigelegten CD-ROM ist aus Vorlesungen, Übungen und Praktika hervorgegangen, die der Autor an verschiedenen Hochschulen für Maschinenbauer und Maschinenbauinformatiker gehalten hat. Es wendet sich darüber hinaus an Studenten der Natur- und Ingenieurwissenschaften. Weiterhin ist es für Physiker und Ingenieure geeignet, die sich im Selbststudium in die Methode einarbeiten wollen oder an Weiterbildungsveranstaltungen teilnehmen.

In einem Anfangskapitel werden die mathematischen Hilfsmittel wiederholt, die für die weitere Behandlung des Stoffes notwendig sind. Daran schließt sich die Beschreibung elastostatischer Probleme an. Zum Einstieg in die FEM wird das Verfahren von Ritz behandelt. Das Verfahren wird so beschrieben, daß es einer Programmierung mit einem Computeralgebra-System (CAS) zugänglich ist. Diese Vorgehensweise wird auch bei der Herleitung des weiteren Stoffes beibehalten. Neben der Elastostatik wird das Gebiet der Feldprobleme behandelt. Daran schließt sich die Betrachtung nichtlinearer Probleme für Stab und Balken an. Abschließend wird auf die entwickelten Computeralgebraprogramme eingegangen.

Die beigelegte CD-ROM stellt eine wesentliche Ergänzung des Buches dar. Sie enthält neben der Software, die aus insgesamt ca. 27000 Zeilen besteht, Handrechenbeispiele zu den einzelnen Kapiteln des Buches. Die Software soll rechnerunterstütztes Lernen ermöglichen. Sie ist in zwei Anwendungsfelder unterteilbar. Zum einen handelt es sich um Computeralgebraprogramme in „MAPLE“, die die Ableitungen des Buches zum Inhalt haben. So ist zum Beispiel das eindimensionale Stabelement im Programm so verallgemeinert, daß man damit ein Stabelement mit n Knoten und verschiedenen Geometrieformen entwickeln kann. Zum anderen enthält die CD-ROM ein FE-Paket. Dieses liegt sowohl als Computeralgebraprogramm als auch in einer Hochsprache vor. Hiermit lassen sich FE-Probleme in symbolischer und numerischer Form

lösen. Ergänzt wird das Paket um einen Postprozessor zur grafischen Auswertung der Eingabe- und Ausgabedaten. Das Arbeiten mit der umfangreichen Software wird mit einem separaten Hilfeprogramm unterstützt. Es werden Eingabebeschreibungen, die durch Beispiele ergänzt sind, leicht verständlich. Weitere Beispiele zu den Programmen zeigen die Anwendungsbreite der Programme auf. Die Verknüpfung von Buch und CD-ROM ist durch zahlreiche Verweise und Beispiele gegeben und macht so ein rechnergestütztes Selbststudium möglich.

Die Erstellung des Buches und der CD-ROM wäre in der vorliegenden Form ohne die engagierte Mitarbeit verschiedener Personen nicht möglich gewesen. Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Averkamp, der für die Erstellung der CD sowie für die Erstellung der Bilder zuständig war. Weiterhin kümmerte er sich um die Realisierung des Skriptes mit \LaTeX . Mein Dank gilt auch Frau cand.-ing. Fresmann und Frau cand.-ing. Kreuch, die einen Großteil des Skriptes mit \LaTeX realisierten und die Oberfläche von „MAPLE“ mittels maplets programmierten. Dank auch an Frau Dipl.-Ing. Terlinde für die sorgfältige Durchsicht des Skriptes. Danken möchte ich auch dem Springer-Verlag für die gute Zusammenarbeit, speziell Frau Hestermann-Beyerle.

Steinfurt, im Juli 2003

Peter Steinke

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	
1.1	Vorgehensweise bei der FEM	3
1.2	Verschiedene Elementtypen	5
1.3	Beispiele zur Finite-Elemente-Methode	10
1.3.1	Beispiel zu nichtlinearen Problemen	10
1.3.2	Beispiele zur Optimierung	11
2	Mathematische Grundlagen	
2.1	Schreibweisen	19
2.2	Vektoren	20
2.2.1	Definition eines n dimensionalen Vektors	20
2.2.2	Skalarprodukt	20
2.2.3	Kreuzprodukt	20
2.2.4	Ableitung von Vektoren	21
2.2.5	Der Nabla-Vektor	22
2.2.6	Der Gradientenvektor	22
2.2.7	Divergenz und Laplace-Operator	23
2.3	Matrizen	23
2.3.1	Definition einer Matrix	23
2.3.2	Rechenregeln	24
2.3.3	Transponierte Matrix	26
2.3.4	Orthogonale Matrix	26
2.4	Die Dyade (Tensor zweiter Stufe)	27
2.4.1	Differentialoperator	27
2.4.2	Tensor höherer Stufe	28
2.5	Felder	28
2.5.1	Skalarfelder	28
2.5.2	Das Vektorfeld als Gradient des Skalarfeldes	28
2.5.3	Das dyadische Feld	29
2.6	Lineare Transformation	31
2.6.1	Transformation eines Vektors	31
2.6.2	Transformation einer Dyade (Tensor zweiter Stufe)	33
2.6.3	Beispiele zur Transformation	34
2.7	Funktionale	36
2.7.1	Diskretisierung des Funktionals	37
2.8	Dreieckskoordinaten	39
2.8.1	Ableitungen in Dreieckskoordinaten (Jakobi-Matrix)	40
2.8.2	Integration in Dreieckskoordinaten	43
2.9	Numerische Integration (Quadratur)	45
2.9.1	Numerische Integration für eindimensionale Probleme ...	45

2.9.2	Numerische Integration in Dreieckskoordinaten	46
2.10	Lineare Gleichungssysteme bei der FEM	47
2.10.1	Definition der Bandbreite	48
2.10.2	Rechenzeiten zur Lösung linearer Gleichungssysteme	49
2.10.3	Positiv definite Matrix	50
2.10.4	Das Verfahren von Cholesky	51
2.10.5	Kondition linearer Gleichungssysteme	53
2.10.6	Zwangsbedingungen bei linearen Gleichungssystemen	55
2.11	Näherungsfehler bei der FEM	57
2.12	Das Tonti-Diagramm	58
3	Beschreibung elastostatischer Probleme	
3.1	Die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie.....	61
3.1.1	Verknüpfung der Verschiebungen mit den Dehnungen ...	61
3.1.2	Das Stoffgesetz.....	62
3.1.3	Gleichgewichtsbedingungen	62
3.1.4	Randbedingungen	62
3.1.5	Das Tonti-Diagramm des elastostatischen Problems.....	63
3.1.6	Verknüpfung der Grundgleichungen der Elastostatik.....	64
3.2	Das Prinzip virtueller Verrückungen.....	65
3.2.1	Das Prinzip vom Gesamtpotential	65
4	Das Verfahren von Ritz	
4.1	Aufprägen der wesentlichen Randbedingungen.....	72
4.1.1	Beispiel zu den wesentlichen Randbedingungen.....	73
4.2	Eindimensionale Stabprobleme	75
4.2.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	75
4.2.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	76
4.2.3	Beispiel zum eindimensionalen Stab	77
4.3	Eindimensionale Balkenprobleme	79
4.3.1	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	79
4.3.2	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	79
4.3.3	Variation des Gesamtpotentials	80
4.4	Scheibenproblem	84
4.4.1	Verschiebungsansätze	85
4.4.2	Wesentliche Randbedingungen	85
4.4.3	Dehnungen und Spannungen der Scheibe.....	86
4.4.4	Diskretisierung der Formänderungsarbeit.....	87
4.4.5	Diskretisierung des Potentials der äußeren Lasten.....	88
4.4.6	Variation des Gesamtpotentials	89
4.4.7	Kragbalken als Scheibenproblem.....	89

5	Stabelemente	
5.1	Das eindimensionale Stabelement	95
5.1.1	Problemdefinition	95
5.1.2	Das Tonti-Diagramm des Stabes	95
5.1.3	Das Funktional des Stabproblems	98
5.1.4	Diskretisierung des Funktionals des Stabes	98
5.1.5	Variation des Funktionals	101
5.1.6	Beispiel zum eindimensionalen Stab.....	103
5.1.7	Direkte Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	109
5.1.8	Allgemeine Erstellung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	112
5.1.9	Übungsbeispiele zum eindimensionalen Stab	116
5.1.10	Variable Querschnittsfläche des Stabelementes	118
5.1.11	Eindimensionales Stabelement mit n Knoten	119
5.1.12	Eindimensionaler Stab mit drei bzw. vier Knoten	121
5.2	Das zwei- und dreidimensionale Stabelement	122
5.2.1	Das zweidimensionale Stabelement	122
5.2.2	Beispiel zum zweidimensionalen Stabproblem	126
5.2.3	Optimierung eines Stabtragwerkes.....	130
5.2.4	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Stab.....	133
5.2.5	Das dreidimensionale Stabelement	136
6	Balkenelemente	
6.1	Das eindimensionale Balkenelement.....	141
6.1.1	Problemdefinition	141
6.1.2	Dehnungen und Spannungen im Balken	142
6.1.3	Das Tonti-Diagramm des Bernoulli-Balkens	143
6.1.4	Funktional des Balkenproblems	144
6.1.5	Formfunktionen des eindimensionalen Balkens	145
6.1.6	Diskretisierung des Funktionals	147
6.1.7	Variation des diskretisierten Funktionals	149
6.1.8	Bilden der Steifigkeitsmatrix	150
6.1.9	Diskretisierung der Streckenlast.....	151
6.1.10	Schnittgrößen des Balkenelementes	153
6.2	Beispiel zum eindimensionalen Balken	155
6.2.1	Zweiseitig gelagerter Balken mit Streckenlast	155
6.2.2	Konvergenztest zum zweiknotigen Balkenelement.....	159
6.2.3	Realisierung des Gelenkes über eine Zwangsbedingung... ..	161
6.3	Übungsbeispiele zum Bernoulli-Balken.....	163
6.4	Balkenelement mit n Knoten und p Freiheitsgraden pro Knoten	166
6.4.1	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Knoten	169

6.5	Das eindimensionale Balkenelement mit drei Freiheitsgraden pro Knoten	173
6.5.1	Balken mit unstetiger Krümmungsverteilung	176
6.6	Der Timoshenko-Balken	177
6.6.1	Schnittgrößen beim Timoshenko-Balken	183
6.6.2	„Locking-Effect“	184
6.6.3	Übungsbeispiele zum Timoshenko-Balken	186
6.7	Der elastisch gelagerte Balken	187
6.7.1	Beispiel zum elastisch gelagerten Balken	189
6.8	Zweidimensionales Balkenelement	194
6.8.1	Freiheitsgrade des zweidimensionalen Balkens	194
6.8.2	Überlagerung der Dehnungen von Stab und Balken	194
6.8.3	Steifigkeitsmatrix	195
6.8.4	Transformation der Steifigkeitsmatrix	197
6.9	Beispiel und Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken	200
6.9.1	Winkelproblem	200
6.9.2	Übungsbeispiele zum zweidimensionalen Balken	206
7	Scheibenproblem	
7.1	Problemdefinition	211
7.2	Die Grundgleichungen des Scheibenproblems	212
7.2.1	Die Feldgleichungen der Scheibe	213
7.3	Das Funktional des Scheibenproblems	214
7.3.1	Diskretisierung des Funktionals	215
7.3.2	Variation des diskretisierten Funktionals	219
7.3.3	Diskretisierung der Volumenkräfte	221
7.3.4	Diskretisierung der Streckenlasten	224
7.3.5	Spannungen in der Scheibe	227
7.3.6	Beispiel zum Scheibenproblem	227
7.4	Übungsbeispiele zur Scheibe	233
7.5	Isoparametrisches Scheibenelement	236
7.5.1	Isoparametrische Viereckselemente	236
7.5.2	Das vierknotige Viereckselement	237
7.5.3	Beispiel zu möglichen Formen des Viereckselementes	242
7.5.4	Numerische Integration mittels Gauß-Quadratur	247
7.5.5	Diskretisierung der Volumenkräfte	250
7.5.6	Diskretisierung der Streckenlast	254
7.5.7	Berechnung der Spannungen	255
7.5.8	Lokale Glättung der Spannungen	255
7.5.9	Beispiel zur lokalen Spannungsglättung	257

7.5.10	Vergleich der Verformungen von Dreiecks- und Viereckselement	258
8	Platten- und Schalenelemente	
8.1	Problemdefinition	263
8.2	Grundbeziehungen der Platte	263
8.2.1	Voraussetzungen bei der Kirchhoff-Platte	263
8.2.2	Kinematische Größen der Platte	265
8.2.3	Krümmungs-Momenten-Beziehung (Stoffgleichung)	266
8.2.4	Gleichgewichtsbeziehungen der Platte	268
8.2.5	Randbedingungen der Platte	268
8.3	Das Funktional der Platte	269
8.4	Anforderungen an das Plattenelement	271
8.4.1	Kompatibilität (konforme Elemente)	271
8.4.2	Starrkörperbewegung	272
8.4.3	Konstanter Dehnungszustand (Verzerrungszustand)	273
8.4.4	Einige Dreiecksplattenelemente	273
8.5	Diskretisierung des Funktionals	275
8.5.1	Ansatzfunktion für die Durchbiegung	275
8.5.2	Interpolationsbedingungen	276
8.5.3	Formfunktionen	279
8.5.4	Krümmungs-Verschiebungs-Beziehung	280
8.5.5	Steifigkeitsmatrix	280
8.5.6	Flächenlast	282
8.5.7	Streckenlast entlang einer Elementkante	282
8.6	Konvergenztest des Plattenelementes	284
8.6.1	Vergleich der Platten nach DKT und Specht	285
8.7	Schalenelement	286
8.7.1	Konvergenztest für verschiedene Schalenelementtypen ...	292
9	Räumlicher Spannungszustand	
9.1	Problemdefinition	297
9.2	Die Grundgleichungen des räumlichen Problems	297
9.2.1	Die Feldgleichungen des räumlichen Problems	298
9.3	Das Funktional des räumlichen Problems	300
9.4	Das vierknotige Tetraederelement	301
9.4.1	Volumenkoordinaten	301
9.4.2	Das vierknotige Tetraederelement in globalen Koordinaten	302
9.5	Diskretisierung des Funktionals	302
9.5.1	Formfunktionen des vierknotigen Tetraederelementes	302
9.5.2	Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung	304
9.5.3	Spannungs-Verschiebungs-Beziehung	307

9.5.4	Variation des diskretisierten Funktional	308
9.5.5	Steifigkeitsmatrix des vierknotigen Tetraederelementes ..	308
9.5.6	Spannungen im vierknotigen Tetraederelement	312
9.5.7	Flächenlast beim vierknotigen Tetraederelement	312
9.5.8	Volumenkräfte beim vierknotigen Tetraederelement	314
9.5.9	Konvergenztest in den Verformungen	315
9.5.10	Konvergenztest in den Spannungen	316
9.5.11	Beispiel zu einem räumlichen Spannungsproblem.....	317
10	Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Stäben, Balken, Scheiben und Platten	
10.1	Das Prinzip von Hamilton	321
10.1.1	Diskretisierung des Wirkungsfunktional	321
10.1.2	Eigenwerte und Eigenfrequenzen.....	323
10.1.3	Eigenvektoren und Schwingungsformen	324
10.2	Massenmatrix des eindimensionalen Stabes.....	324
10.3	Beispiele zum eindimensionalen Stab	325
10.3.1	Einmassenschwinger	325
10.3.2	Zweimassenschwinger	326
10.3.3	Übungsbeispiel zur Stabschwingung.....	329
10.4	Massenmatrix des zweidimensionalen Stabes.....	329
10.4.1	Beispiel zum zweidimensionalen Stab	330
10.5	Der eindimensionale, zweiknotige Balken	333
10.5.1	Der eindimensionale Balken mit Längsverschiebung	333
10.5.2	Der eindimensionale Balken ohne Längsverschiebung.....	334
10.5.3	Beispiele zum eindimensionalen Balken.....	334
10.5.4	Beidseitig gelenkig gelagerter Balken	335
10.5.5	Kragbalken	337
10.5.6	Übungsbeispiel zur Balkenschwingung	340
10.6	Massenmatrix des zweidimensionalen Balkens.....	340
10.6.1	Beispiel zum 2D-Balken	341
10.7	Massenmatrix des dreiknotigen Scheibenelementes	344
10.7.1	Beispiel zur Eigenfrequenz einer Scheibe.....	344
10.8	Massenmatrix der Platte nach Specht	347
11	Knicken von Stäben und Balken	
11.1	Green-Lagrange Dehnungstensor.....	353
11.2	Formänderungsarbeit des Stabes.....	354
11.3	Dehnungen und Formänderungsarbeit des Balkens.....	355
11.4	Das zweiknotige Stabelement	356
11.5	Das zweiknotige Balkenelement	358
11.6	Das Knicken als Eigenwertproblem	361

11.6.1	Beispiel zum Knicken von Stäben	363
11.6.2	Knickbeispiel I (Stab)	367
11.6.3	Beispiel zum Knicken von Balken	368
11.6.4	Die vier Eulerfälle	370
11.6.5	Knickbeispiel II (Balken)	371
11.6.6	Knickbeispiel III (Dreiknotiges Balkenelement)	371
12	Feldprobleme	
12.1	Wärmeübertragung	377
12.1.1	Die Poisson'sche Gleichung	377
12.1.2	Randbedingungen	377
12.1.3	Das Funktional der Wärmeübertragung	378
12.2	Eindimensionale Wärmeübertragung	379
12.2.1	Problemdefinition	379
12.2.2	Funktional des eindimensionalen Wärmeübertragungsproblems	380
12.2.3	Diskretisierung des Funktionalis	380
12.2.4	Variation des Funktionalis	384
12.2.5	Beispiel zur eindimensionalen Wärmeübertragung	384
12.2.6	Übungsbeispiele zur eindimensionalen Wärmeübertragung	389
12.3	Zweidimensionale Wärmeübertragung	392
12.3.1	Problemdefinition	392
12.3.2	Randbedingungen bei der zweidimensionalen Wärmeübertragung	392
12.3.3	Diskretisierung des Funktionalis	393
12.3.4	Variation des Funktionalis	400
12.3.5	Beispiel zur zweidimensionalen Wärmeübertragung	402
12.3.6	Übungsbeispiele zur zweidimensionalen Wärmeübertragung	407
12.4	Torsion von prismatischen Körpern	411
12.4.1	Funktional des Torsionsproblems	414
12.5	Analogie zwischen Wärmeübertragung und Schichtenströmung	417
12.5.1	Problembeschreibung	417
12.5.2	Grundgleichungen der Schichtenströmung	417
12.5.3	Analogie der Randbedingungen	419
12.5.4	Analoges Funktional des Strömungsproblems	420
13	CALL_for_FEM	
13.1	Übersicht über CALL_for_FEM	425
13.1.1	Erstinstallation von CALL_for_FEM auf dem Rechner	426
13.1.2	Installation einer neuen Version von CALL_for_FEM	426
13.1.3	Lösungen zu den Übungsbeispielen	427

13.1.4	Hinweise auf die Lernsoftware durch Icons.....	427
13.1.5	Video-Tutorials als Lernmittel	428
13.2	Numerische Programme	429
13.3	Symbolische Programme	430
13.3.1	Symbolische Programme in Maple und Python	430
13.3.2	Symbolische Programme in Maple realisiert	432
13.4	Ausführliche Programmbeschreibungen.....	433
13.4.1	Das Programm InterFEM	433
13.4.2	Das Verfahren von Ritz für den eindimensionalen Stab (Ritz_Stab)	434
13.4.3	Das Verfahren von Ritz für den Balken (Ritz_Balken)	436
13.4.4	Das Verfahren von Ritz für die Scheibe (Ritz_Scheibe) ..	438
13.4.5	Eindimensionales Stabelement (Stab_1D).....	440
13.4.6	Eindimensionales Balkenelement (Balken_1D)	442
13.4.7	Timoshenko-Balken (Timoshenko_1D).....	443
13.4.8	Dreiecksscheibenelement (Scheibe_Dreieck)	444
13.4.9	Plattenelement (Platte)	445
13.4.10	Knicken des eindimensionalen Balkens (Knicken_Balken)	445
13.4.11	Eigenfrequenzen und Schwingungsform des Balkens (Dy- namik_Balken).....	447
13.4.12	Eindimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_1D)	448
13.4.13	Zweidimensionale Feldprobleme (Feldprobleme_2D)	449
14	Beispiele zu den Programmen	
14.1	Elastisch gelagerter Balken.....	453
14.2	Scheibe gestützt durch eine Feder.....	454
14.3	Wärmeübertragung (Torsion) eines gleichseitigen Drei- ecks (Quadrates).....	456
	Verwendete Formelzeichen und Symbole	461
	Literaturverzeichnis	473
	Sachverzeichnis	477
	Programme	485