

DIE GRUNDLEHREN DER  
MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER  
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE  
HAMBURG

M. BORN  
GÖTTINGEN

C. RUNGE  
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT  
GÖTTINGEN

BAND X  
DER RICCI-KALKÜL  
VON  
J. A. SCHOUTEN



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER  
1924

# DER RICCI-KALKÜL

EINE EINFÜHRUNG IN DIE NEUEREN METHODEN  
UND PROBLEME DER MEHRDIMENSIONALEN  
DIFFERENTIALGEOMETRIE

VON

J. A. SCHOUTEN

ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK  
AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE  
DELFT IN HOLLAND

MIT 7 TEXTFIGUREN



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER  
1924

ALLE RECHTE, INSBESONDERE  
DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

COPYRIGHT 1924 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

Softcover reprint of the hardcover edition 1924

ISBN 978-3-642-51798-3      ISBN 978-3-642-51838-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-51838-6

HERRN PROFESSOR  
DR. GREGORIO RICCI CURBASTRO  
IN PADUA  
DEM BEGRÜNDER  
DES ABSOLUTEN DIFFERENTIALKALKÜLS  
ZU SEINEM SIEBZIGSTEN GEBURTSTAGE  
AM 12. JANUAR 1923  
GEWIDMET VOM VERFASSEN

## Vorwort.

Bei der Herausgabe dieses Buches möchte ich an dieser Stelle Herrn *L. Berwald* in Prag, Herrn *D. J. Struik* in Delft und Herrn *R. Weitzenböck* in Blaricum, die mich durch das Mitlesen der Korrekturen sowie durch viele wichtige Bemerkungen aufs wirksamste unterstützt haben, meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

Einen freundschaftlichen Gruß dem mathematischen Kreise in Hamburg, wo es mir vergönnt war, im Sommersemester dieses Jahres über die mehrdimensionale Affingeometrie zu lesen. Manche anregende Bemerkung zum vierten Abschnitt brachte mir diese schöne Zeit, die mir immer in freudiger Erinnerung bleiben wird.

Der Verlagsbuchhandlung Julius Springer meinen besonderen Dank für die sorgfältige Behandlung der Korrekturen, die mir die saure Arbeit des Korrigierens fast zu einer Freude machte.

Delft, im Dezember 1923.

**J. A. Schouten.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	1
<b>I. Der algebraische Teil des Kalküls.</b>	
§ 1. Die allgemeine Mannigfaltigkeit $X_n$ . . . . .	8
§ 2. Der Begriff der Übertragung . . . . .	9
§ 3. Die euklidischaffine Mannigfaltigkeit $E_n$ . . . . .	9
§ 4. Kontravariante und kovariante Vektoren . . . . .	12
§ 5. Kontravariante und kovariante Bivektoren, Trivektoren usw. . . . .	17
§ 6. Geometrische Darstellung kontravarianter und kovarianter $p$ -Vektoren bei Einschränkung der Gruppe . . . . .	20
§ 7. Allgemeine Größen . . . . .	23
§ 8. Die Überschiebungen . . . . .	28
§ 9. Geometrische Darstellung der Tensoren . . . . .	32
§ 10. Größen zweiten Grades und lineare Transformationen . . . . .	33
§ 11. Die Einführung einer Maßbestimmung in der $E_n$ . . . . .	36
§ 12. Die Fundamentaltensoren . . . . .	38
§ 13. Geometrische Darstellung alternierender Größen bei der orthogonalen und rotationalen Gruppe. Metrische Eigenschaften . . . . .	41
§ 14. Metrische Eigenschaften eines Tensors zweiten Grades . . . . .	43
§ 15. Der Begriff der Komponenten. Winkel einer $R_p$ und einer $R_q$ in $R_n$ . . . . .	45
§ 16. Infinitesimale Drehungen und Bivektoren . . . . .	48
§ 17. Lineare Abhängigkeit und Dimensionenzahl von Tensoren und $p$ -Vektoren . . . . .	50
§ 18. Die Größen der $X_n$ . . . . .	55
§ 19. Die Einführung einer Maßbestimmung in der $X_n$ . . . . .	58
Aufgaben . . . . .	59
<b>II. Der analytische Teil des Kalküls.</b>	
§ 1. Die Ortsfunktionen . . . . .	61
§ 2. Die linearen Übertragungen . . . . .	62
§ 3. Das Feld $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ . . . . .	66
§ 4. Die Felder $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ und $S'_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ . . . . .	67
§ 5. Das Feld $Q_{\mu}^{\cdot\lambda\nu}$ . . . . .	70
§ 6. Die allgemeine lineare Übertragung ausgedrückt in $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ , $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ , $g^{\lambda\nu}$ und $Q_{\mu}^{\cdot\lambda\nu}$ . . . . .	72
§ 7. Spezialisierung der allgemeinsten linearen Übertragung . . . . .	74
§ 8. Die geodätischen Linien. . . . .	76
§ 9. Die geodätischen Linien einer $V_n$ als kürzeste Linien . . . . .	77
§ 10. Geodätisch mitbewegtes Bezugssystem und geodätisches System von Urvariablen . . . . .	79
§ 11. Ein Satz von <i>Weyl</i> . . . . .	81
§ 12. Die Krümmungsgrößen . . . . .	83
§ 13. Die Krümmungsgrößen der weniger allgemeinen Übertragungen . . . . .	86
§ 14. Die vier Identitäten der Krümmungsgrößen. . . . .	87
§ 15. Die inhaltstreuen Übertragungen . . . . .	89
§ 16. Die <i>Bianchi'sche</i> Identität . . . . .	90

§ 17. Darstellung einer überschiebungsinvarianten Übertragung mit Hilfe von idealen Faktoren der Größe $A_\lambda^v$ . . . . .	92
§ 18. Darstellung einer <i>Riemannschen</i> Übertragung mit Hilfe der idealen Faktoren des Fundamentaltensors . . . . .	94
§ 19. Verallgemeinerungen d. <i>Gaußschen</i> u. <i>Stokes'schen</i> Integralsätze in einer $X_n$	95
§ 20. Die Übertragungen von <i>Wirtinger</i> . . . . .	99
§ 21. Der Reduktionssatz . . . . .	101
Aufgaben . . . . .	101

**III. Die Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichungen.**

§ 1. Abhängigkeit von skalaren Ortsfunktionen . . . . .	104
§ 2. Lineare partielle Differentialgleichungen . . . . .	104
§ 3. Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen. . . . .	106
§ 4. Integrabilitätsbedingungen einer Gradientgleichung. . . . .	109
§ 5. Die Bedingungen für ein Gradientprodukt . . . . .	110
§ 6. Integrabilitätsbedingungen v. Affinordifferentialgleichungen. Erster Typus	113
§ 7. Integrabilitätsbedingungen. Zweiter Typus . . . . .	115
§ 8. Integrabilitätsbedingungen. Dritter Typus . . . . .	117
§ 9. Integrabilitätsbedingungen. Vierter Typus . . . . .	118
§ 10. Integrabilitätsbedingungen. Fünfter Typus . . . . .	119
§ 11. Das <i>Pfaffsche</i> Problem . . . . .	119
§ 12. Bedingungen für ein $X_q$ -bildendes kovariantes $p$ -Vektorfeld . . .	126
Aufgaben . . . . .	127

**IV. Die affine Übertragung.**

Übersicht der wichtigsten Formeln der affinen Übertragung . . . . .	128
§ 1. Bahntreue Transformation der Übertragung . . . . .	129
§ 2. Die Projektivkrümmung . . . . .	130
§ 3. Euklidischaffine Übertragungen . . . . .	132
§ 4. Größen der $X_{n-1}$ in $A_n$ . . . . .	133
§ 5. Die Einheitsaffinoren der $A_n$ und der $X_{n-1}$ . . . . .	135
§ 6. Die in der $X_{n-1}$ induzierten Übertragungen . . . . .	136
§ 7. Die Gleichungen von <i>Gauß</i> und <i>Codazzi</i> . . . . .	140
§ 8. Einführung der zweiten Normierungsbedingung für $t_\lambda$ und $n^v$ . . .	141
§ 9. Festlegung der pseudonormalen Richtung und des Pseudonormalvektors	144
§ 10. Spezialisierung f. projektiveuklidische u. euklidischaffine Übertragungen	147
§ 11. Krümmungstheorie . . . . .	148
§ 12. Änderung des Pseudonormalvektors bei bahntreuen Änderungen der Übertragung der $A_n$ . . . . .	152
§ 13. Änderung der Übertragung in der $X_{n-1}$ . . . . .	154
§ 14. Größen der $X_m$ in $A_n$ . . . . .	156
§ 15. Die in der $X_m$ induzierte affine Übertragung . . . . .	158
§ 16. Die Gleichungen von <i>Gauß</i> und <i>Codazzi</i> für $X_m$ in $A_n$ . . . . .	160
§ 17. Einführung der zweiten Normierungsbedingung für $t_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ und $n^{v_1 \dots v_p}$	161
§ 18. Festlegung des Pseudonormal- $p$ -Vektors. . . . .	162
Aufgaben . . . . .	165

**V. Die Riemannsche Übertragung.**

Übersicht der wichtigsten Formeln der <i>Riemannschen</i> Übertragung . . .	167
§ 1. Konforme Transformation der Übertragung . . . . .	168
§ 2. Die Konformkrümmung . . . . .	169
§ 3. Euklidischmetrische Übertragungen . . . . .	171
§ 4. Die Größen einer $V_{n-1}$ in $V_n$ . . . . .	173
§ 5. Die in der $V_{n-1}$ induzierte Übertragung . . . . .	174
§ 6. Der zweite Fundamentaltensor einer $V_{n-1}$ in $V_n$ . . . . .	175

	Seite
§ 7. Kanonische Kongruenzen und Hauptkrümmungslinien . . . . .	176
§ 8. Krümmungseigenschaften einer $V_{n-1}$ in $V_n$ . . . . .	178
§ 9. Der Krümmungsaffinor einer $V_m$ in $V_n$ . . . . .	181
§ 10. Krümmungsgebiet und Krümmungsgebilde einer $V_m$ in $V_n$ . . . . .	183
§ 11. Minimalmannigfaltigkeiten . . . . .	188
§ 12. Orthogonale Systeme von $V_{n-1}$ durch eine gegebene Kongruenz . . . . .	190
§ 13. $n$ -fache Orthogonalsysteme . . . . .	194
§ 14. Bedingungen für einen Tensor mit $V_{n-1}$ -normalen Hauptrichtungen . . . . .	196
§ 15. Die Beziehungen der Krümmungsgrößen der $V_m$ und der $V_n$ . . . . .	197
§ 16. Absolute, relative und erzwungene Krümmung einer $V_m$ in $V_n$ . . . . .	199
§ 17. Bedingungen für eine $V_m$ in $V_n$ . . . . .	200
§ 18. Änderung des Krümmungsaffinors $H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ bei konformen Transformationen der $V_n$ . . . . .	201
§ 19. Änderung der Krümmungsgröße $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ bei bahntreuen Transformationen der Übertragung . . . . .	202
§ 20. Infinitesimale bahntreue Transformationen . . . . .	208
§ 21. Infinitesimale konforme Transformationen . . . . .	211
Aufgaben . . . . .	213
<b>VI. Die Weylsche Übertragung.</b>	
Übersicht der wichtigsten Formeln der <i>Weyl</i> 'schen Übertragung . . . . .	216
§ 1. Einleitende Sätze . . . . .	217
§ 2. Bahntreue Transformationen . . . . .	220
§ 3. Die Größen einer $X_{n-1}$ in $W_n$ . . . . .	223
§ 4. Die in der $W_{n-1}$ induzierte Übertragung . . . . .	224
§ 5. Die Krümmungen einer $X_1$ in $W_n$ . . . . .	225
§ 6. Krümmungseigenschaften einer $W_{n-1}$ in $W_n$ . . . . .	230
§ 7. Die Gleichungen von <i>Gauß</i> und <i>Codazzi</i> . . . . .	231
§ 8. Unmöglichkeit einer weiteren Normierung von $i_\lambda$ und $n^\nu$ . . . . .	232
§ 9. Der Krümmungsaffinor einer $X_m$ in $W_n$ . . . . .	233
§ 10. Das Krümmungsgebilde einer $W_m$ in $W_n$ . . . . .	234
§ 11. Änderung des Krümmungsaffinors bei konformen Transformationen der Übertragung . . . . .	235
Aufgaben . . . . .	237
<b>VII. Die invariante Zerlegung einer Größe höheren Grades.</b>	
§ 1. Problemstellung . . . . .	238
§ 2. Alternationen und Mischungen . . . . .	239
§ 3. Konjugierte Operationen . . . . .	240
§ 4. Einige Sätze aus der Theorie der assoziativen Zahlensysteme . . . . .	243
§ 5. Die Zahlensysteme der Permutationen und der Klassenoperatoren . . . . .	245
§ 6. Die Zerlegung einer Elementarsumme in geordnete Elementargrößen . . . . .	250
§ 7. Berechnung der Bestimmungszahlen der Elementargrößen . . . . .	257
§ 8. Die Zerlegung einer bestimmten Größe sechsten Grades . . . . .	258
§ 9. Die Zerlegung einer symmetrischen Größe bei der orthogonalen Gruppe . . . . .	262
§ 10. Die Zerlegung einer allgemeinen Größe bei der orthogonalen Gruppe . . . . .	264
§ 11. Beispiel der Zerlegung bei der orthogonalen Gruppe . . . . .	266
§ 12. Die Beziehungen der Zerlegung bei der affinen Gruppe zu den Reihenentwicklungen der Invariantentheorie . . . . .	267
Aufgaben . . . . .	267
Lösungen . . . . .	269
Literaturverzeichnis . . . . .	290
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .	301
Druckfehlerberichtigungen . . . . .	312