

DIE GRUNDLEHREN DER  
MATHEMATISCHEN  
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER  
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE  
HAMBURG

M. BORN  
GÖTTINGEN

C. RUNGE †  
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT  
GÖTTINGEN

BAND XXIX

VORLESUNGEN ÜBER  
DIFFERENTIALGEOMETRIE III

VON

WILHELM BLASCHKE



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1929

VORLESUNGEN ÜBER  
D I F F E R E N T I A L -  
G E O M E T R I E

UND GEOMETRISCHE GRUNDLAGEN VON  
EINSTEINS RELATIVITÄTSTHEORIE

VON

WILHELM BLASCHKE

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER  
UNIVERSITÄT HAMBURG

III

DIFFERENTIALGEOMETRIE  
DER KREISE UND KUGELN

BEARBEITET VON

GERHARD THOMSEN

PRIVATDOZENT DER MATHEMATIK AN DER  
UNIVERSITÄT HAMBURG

MIT 68 TEXTFIGUREN



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1929

ISBN 978-3-642-50513-3      ISBN 978-3-642-50823-3 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-642-50823-3

**ALLE RECHTE, INSBESONDERE  
DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.**

**COPYRIGHT 1929 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN.  
SOFTCOVER REPRINT OF THE HARDCOVER 1ST EDITION 1929**

## Vorwort.

Dieser Band ist aus Vorlesungen entstanden, die mein Freund und Kollege *Thomsen* und ich in Hamburg gehalten haben. Die Darstellung und nähere Ausführung dieses Bandes geht allein auf Herrn *Thomsen* zurück.

Es handelt sich hier um die verschiedenen Arten der Kugelgeometrie, die sich alle einbauen lassen in die sogenannte *höhere Kugelgeometrie von Lie* und auf deren Boden systematisch zusammengefaßt werden können. Die allgemeine Kugelgeometrie liefert ein Beispiel zur Auseinandersetzung der Ideen von *Kleins Erlanger Programm*, das an Schlagkraft dem der projektiven Geometrie gleichwertig, ja, wenn man zu den schwierigeren Fragen der Differentialgeometrie übergeht, sogar überlegen erscheint. Besonders handelt es sich um die Darstellung der Inversionsgeometrie des Raumes (oder, wie wir sagen wollen, um die *Kugelgeometrie von Möbius*) und um die *Kugelgeometrie von Laguerre*. Diese letztere Gruppe ist heute für die Physik als Gruppe der speziellen Relativitätstheorie wichtig geworden. Von der Kugelgeometrie aus gewinnt man aber weiter auch Einblick in die verschiedenen Zweige der *nichteuklidischen Geometrie*. Endlich wird auch der Verwandtschaft der Kugelgeometrie von *Lie* mit der *projektiven Geometrie* Rechnung getragen. So findet sich die projektive Flächentheorie, wie sie insbesondere von *Fubini* und *Čech* begründet und vor allem in Italien gepflegt worden ist, in den §§ 90 ff. von diesem Standpunkt aus in ihren Grundzügen entwickelt. So läßt sich wohl sagen, daß in den vorliegenden drei ersten Bänden die Differentialgeometrie der wichtigsten endlichen geometrischen Gruppen im wesentlichen enthalten ist.

Elementargeometrische Dinge der Kugelgeometrie, für die es wenigstens in deutscher Sprache keine leicht lesbare systematische Darstellung gibt, nehmen im folgenden einen breiten Raum ein. Die im engeren Sinn differentialgeometrischen Untersuchungen sind insbesondere in den Kapiteln III und VI—IX enthalten.

Wegen der Fülle und Vielgestaltigkeit des Stoffes war manche Beschränkung geboten. Fragen der „Differentialgeometrie im Großen“ hat man auf unserem Gebiet eben erst zu behandeln begonnen und

wir können davon nur eine Kostprobe bringen (§ 65). Fragen der komplexen Differentialgeometrie haben wir (von gewissen Übungsaufgaben abgesehen) ganz vermieden und uns ausschließlich auf Reelles beschränkt. Weiter haben wir mehrdimensionale Betrachtungen fast immer vermieden. Nur in Fällen, wo sie eine lohnende Einsicht in dreidimensionale Probleme gewähren (vgl. z. B. § 77) haben wir sie herangezogen.

Die vorkommenden Funktionen werden in der Regel als reell und regulär analytisch vorausgesetzt. Daß bei einer Benennung wie „benachbarte Punkte einer Kurve“ ein Grenzübergang angedeutet ist, ist nicht jedesmal wieder besonders hervorgehoben worden.

An Vorkenntnissen werden nur die Anfangsgründe der projektiven Geometrie und etwa der Inhalt des dritten Kapitels des ersten Bandes dieser Vorlesungen benötigt.

Bei den Korrekturen sind wir wieder aufs freundlichste unterstützt worden, insbesondere durch die Herren *Berwald* (Prag), *Haack* (Danzig), *König* (Hamburg) und *Schatz* (Innsbruck). Ihnen allen wie der bewährten Verlagsbuchhandlung sei hierdurch nochmals gedankt.

Hamburg, im Dezember 1928.

**Wilhelm Blaschke.**

# Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

## Kennzeichnende Eigenschaften der Abbildungen von *Möbius*, *Laguerre* und *Lie*.

	Seite
§ 1. Die Abbildungen von <i>Möbius</i> , <i>Laguerre</i> und <i>Lie</i> als Abbildungen von Gebieten . . . . .	1
§ 2. Abbildungen von Gebieten und ihre Ausdehnung . . . . .	6
§ 3. Die Abbildungen von <i>Möbius</i> , <i>Laguerre</i> und <i>Lie</i> als Abbildungen im Großen . . . . .	13

1. Kapitel.

## Stereographische Projektion und Geometrie von *Möbius* in der Ebene.

§ 4. Hyperbolische Bewegungen in der Ebene . . . . .	16
§ 5. Grundbegriffe der hyperbolischen Geometrie der Ebene . . . . .	21
§ 6. Die nichteuklidische Entfernung . . . . .	25
§ 7. Stereographische Projektion der Kugel. Tetrazyklische Koordinaten	30
§ 8. Abbildung der hyperbolischen Geometrie des Raumes auf die Kreisgeometrie von <i>Möbius</i> in der Ebene . . . . .	35
§ 9. Grundbegriffe der hyperbolischen Geometrie des Raumes und der Kreisgeometrie in der Ebene . . . . .	39

2. Kapitel.

## Invarianten der Kreisgeometrie von *Möbius*.

§ 10. Allgemeines zur Invariantentheorie der Gruppe von <i>Möbius</i> . . . .	46
§ 11. Inversionsgeometrische Invarianten endlich vieler Vektoren. Die Vorzeicheninvariante dreier Kreise . . . . .	52
§ 12. Gerichtete Kreise . . . . .	57
§ 13. Normalkoordinaten und gerichtete Kreise . . . . .	61
§ 14. Festlegung der Normalkoordinaten der gerichteten Kreise . . . .	65
§ 15. Büschelinvariante dreier sich berührender Kreise. Gerichtete Winkel	68
§ 16. Einordnung der euklidischen Bewegungsgeometrie in die Inversionsgeometrie . . . . .	72
§ 17. Beziehungen der Inversionsgeometrie zur nichteuklidischen Bewegungsgeometrie . . . . .	76
§ 18. Inversionsgeometrische Formeln für die hyperbolische nichteuklidische Geometrie . . . . .	79
§ 19. Gemeinsame Behandlung der elliptischen, hyperbolischen und euklidischen Bewegungsgeometrie im Rahmen der Inversionsgeometrie	84
§ 20. Koordinaten von <i>Gauß</i> . . . . .	87

## 3. Kapitel.

**Kreisscharen, Kurven und Kurvennetze in der Geometrie von Möbius  
in der Ebene.**

	Seite
§ 21. Kreisscharen in der Ebene . . . . .	92
§ 22. Die Grundformeln für die Theorie der Kreisscharen . . . . .	96
§ 23. Schmieggreise. Beziehungen zur euklidischen und nichteuklidischen Bewegungsgeometrie ebener Kurven. . . . .	101
§ 24. Die Hauptkreise einer ebenen Kurve . . . . .	104
§ 25. Inversionsgeometrie ebener Kurven . . . . .	108
§ 26. Flächen im hyperbolischen Raum . . . . .	111
§ 27. Hyperbolische Flächentheorie und Inversionsgeometrie senkrechter Kurvennetze auf der Kugel . . . . .	114
§ 28. Grundformeln für senkrechte Kurvennetze auf der Kugel . . . . .	116
§ 29. Isotherme Kurvennetze . . . . .	120
§ 30. Wechselnetze . . . . .	124
§ 31. Invariante Ableitungen in einem Kurvennetz . . . . .	126
§ 32. Vermischte Aufgaben zu den Kapiteln 1 bis 3 . . . . .	132

## 4. Kapitel.

**Geometrie von Laguerre in der Ebene.**

§ 38. Isotrope Projektion und Abbildungen von <i>Laguerre</i> in der Ebene . .	136
§ 34. Tangentenentfernung. Gerade Kreisreihen . . . . .	140
§ 35. Kreisvektoren. Ebene Kreissysteme . . . . .	145
§ 36. Sphärische Kreissysteme . . . . .	152
§ 37. Einige Eigenschaften der Gruppe von <i>Laguerre</i> . . . . .	155
§ 38. Ebene Kurven in der Geometrie von <i>Laguerre</i> . . . . .	162
§ 39. Der <i>Laguerre-Zykel</i> . . . . .	166
§ 40. Vermischte kleinere Aufgaben . . . . .	171
§ 41. Zusammenhängende größere Aufgaben. . . . .	173

## 5. Kapitel.

**Die Geometrie von Lie in der Ebene.**

§ 42. Pentazyklische Koordinaten. Abbildungen von <i>Lie</i> in der Ebene . .	177
§ 43. Invarianten der Geometrie von <i>Lie</i> . . . . .	181
§ 44. Doppelverhältnis von vier Kreisen eines Büschels. Lineare Kreis- scharen . . . . .	186
§ 45. Lineare Systeme von Kreisen . . . . .	191
§ 46. Weitere Eigenschaften der linearen Systeme . . . . .	196
§ 47. Über den Einbau der Geometrie von <i>Möbius</i> in die Geometrie von <i>Lie</i>	200
§ 48. Einordnung der Geometrie von <i>Laguerre</i> in die Geometrie von <i>Lie</i> .	204
§ 49. Eigenschaften der Gruppe von <i>Lie</i> . . . . .	210
§ 50. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie . . . . .	214
§ 51. Die Abbildungen von <i>Möbius</i> , <i>Laguerre</i> und <i>Lie</i> als Abbildungen von Kreisgebieten . . . . .	219

## 6. Kapitel.

**Geometrie von Lie, Möbius und Laguerre im Raum.**

§ 52. Grundbegriffe der Geometrie von <i>Lie</i> im Raum . . . . .	226
§ 53. Lineare Kugelscharen und Kugelkomplexe . . . . .	229

	Seite
§ 54. Über die Verwandtschaft der Kugelgeometrie von <i>Lie</i> mit der projektiven Liniengeometrie . . . . .	233
§ 55. Hyperboloide und Zykliden von <i>Dupin</i> . . . . .	238
§ 56. Invariantentheorie der Vektorbündel. . . . .	245
§ 57. Flächenstreifen in der Kugel- und Liniengeometrie . . . . .	250
§ 58. Krümmungsstreifen und Asymptotenstreifen auf einer Fläche . . . . .	254
§ 59. Geometrie von <i>Möbius</i> im Raume . . . . .	259
§ 60. Möbius-Geometrie der Kreise, Kugelscharen und Kurven im Raum. (Als Aufgabe) . . . . .	262
§ 61. Geometrie von <i>Laguerre</i> im Raum . . . . .	268
§ 62. Die sphärische Abbildung in der Geometrie von <i>Laguerre</i> . . . . .	272
§ 63. Bestimmung einer Fläche aus dem sphärischen Bild ihrer Krümmungslinien . . . . .	275
§ 64. Flächen mit lauter ebenen Krümmungslinien . . . . .	278
§ 65. Über die Anzahl der Nabelpunkte auf Eiflächen . . . . .	283
§ 66. Vermischte Aufgaben zu den Kapiteln 5 und 6 . . . . .	289

7. Kapitel.

**Flächentheorie in der Geometrie von *Möbius* und *Laguerre*.**

§ 67. Die Zentralkugel und die Mittenkugel einer Fläche . . . . .	296
§ 68. Invariante Ableitungen in der Flächentheorie . . . . .	300
§ 69. Flächentheorie und invariante Ableitungen für beliebige Parameter . . . . .	305
§ 70. Grundformeln der Flächentheorie . . . . .	314
§ 71. Invariant mit einer Fläche verbundene Kugelkomplexe . . . . .	320
§ 72. Isotherme Kurvennetze auf einer Fläche . . . . .	325
§ 73. Krümmungskreise und zyklische Kurvensysteme . . . . .	331
§ 74. Vermischte Aufgaben zum 7. Kapitel . . . . .	337

8. Kapitel.

**Kugelsysteme.**

§ 75. Kugelsysteme in der Geometrie von <i>Möbius</i> und <i>Laguerre</i> . . . . .	342
§ 76. Grundformeln für Kugelsysteme . . . . .	346
§ 77. <i>R</i> -Kugelsysteme . . . . .	351
§ 78. Kugelsysteme, deren Hüllflächen winkeltreu aufeinander bezogen sind . . . . .	357
§ 79. Übergang zur Flächentheorie der euklidischen Bewegungsgeometrie . . . . .	362
§ 80. Gemeinsame Behandlung der hyperbolischen, elliptischen und euklidischen Flächentheorie . . . . .	368
§ 81. <i>M</i> -Minimalflächen und <i>L</i> -Minimalflächen . . . . .	371
§ 82. Flächentheorie in <i>Bonnetschen</i> Koordinaten . . . . .	377
§ 83. Vermischte Aufgaben zum 8. Kapitel . . . . .	381

9. Kapitel.

**Flächen- und Zyklidensysteme in der Geometrie von *Lie*.**

§ 84. Die <i>Liesche</i> Zyklide einer Fläche . . . . .	388
§ 85. Grundformeln der Liegeometrischen Flächentheorie . . . . .	393
§ 86. Oskulierende Zykliden einer Fläche und zyklidische Kurven . . . . .	400
§ 87. Die Hüllflächen des Systems der Zykliden von <i>Lie</i> . . . . .	407



	Seite
§ 88. Flächen mit einer Schar sphärischer oder ebener Krümmungslinien	409
§ 89. Spezielle $R$ -Kugelsysteme . . . . .	413
§ 90. Grundlagen der projektiven Flächentheorie . . . . .	420
§ 91. Aufgaben zur projektiven Flächentheorie . . . . .	424
§ 92. Allgemeine Systeme von Zykliden . . . . .	428
§ 93. Systeme von Zykliden von <i>Lie</i> . . . . .	434
§ 94. $K$ -Minimalflächen und Projektivminimalflächen . . . . .	440
§ 95. Möbius-Geometrie der Kreissysteme im Raum . . . . .	447
§ 96. Vermischte Aufgaben zum 9. Kapitel . . . . .	454

## Anhang.

**Lebensbilder von Möbius, Laguerre und Lie.**

§ 97. <i>August Ferdinand Möbius</i> . . . . .	458
§ 98. <i>Edmond Laguerre</i> . . . . .	461
§ 99. <i>Sophus Lie</i> . . . . .	463
Namen- und Stichwortverzeichnis . . . . .	466