

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE
HAMBURG

M. BORN
GÖTTINGEN

C. RUNGE
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON
R. COURANT
GÖTTINGEN

BAND XXII
VORLESUNGEN ÜBER HÖHERE
GEOMETRIE
VON
FELIX KLEIN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

FELIX KLEIN
VORLESUNGEN ÜBER HOHERE
GEOMETRIE

Dritte Auflage
bearbeitet und herausgegeben

VON

W. BLASCHKE
Professor der Mathematik an der
Universität Hamburg

MIT 101 Abbildungen



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

ISBN 978-3-642-49557-1 ISBN 978-3-642-49848-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-49848-0

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN

COPYRIGHT 1926 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN

SOFTCOVER REPRINT OF THE HARDCOVER 3RD EDITION 1926

Vorwort.

Kleins gruppentheoretischer Aufbau der Geometrie, wie er ihn zuerst 1872 in seinem „Erlanger Programm“ entworfen und dann 1893 in seiner „Einleitung in die höhere Geometrie“ näher ausgeführt hat, ist für die Weiterentwicklung der Geometrie, ja auch der Physik heute so wichtig und lebendig als je. So wird vielleicht manchem eine Neuauflage dieser Vorlesungen willkommen sein. Ich habe, um den persönlichen Eindruck von *Kleins* Werk nicht zu verwischen, an dem früheren „ersten Band“ nur wenig geändert und nur wenig hinzugefügt. Hingegen habe ich den damit nur lose zusammenhängenden „zweiten Band“, der eine Einführung in die Lehre von den stetigen und unstetigen Gruppen enthielt und eine völlige Umarbeitung nötig gemacht hätte, weggelassen. An seine Stelle ist der „dritte Hauptteil“ des vorliegenden Buches getreten, in dem einige neuere geometrische Untersuchungen dargestellt werden. Dabei haben mich mehrere befreundete Geometer unterstützt: die Teile II und IV stammen von *J. Radon* (Erlangen), III im wesentlichen von *E. Artin* und V von *O. Schreier* (Hamburg). Außer diesen Kollegen habe ich für vielfache Hilfe noch zu danken den Herren *L. Berwald* (Prag), *E. Bompiani* (Bologna), *H. Schatz* und *G. Thomsen* (Hamburg).

Hamburg, im Frühjahr 1926.

W. Blaschke.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
§ 1. Allgemeine Vorbemerkungen	2
§ 1,1. Funktionentheoretische Grundbegriffe.	2
§ 1,2. Hauptteilung der Geometrie	4
§ 1,3. Nähere Ausführung hierzu	4
Erster Hauptteil.	
Der allgemeine Koordinatenbegriff.	
Punktkoordinaten	11
§ 2. Linearkoordinaten	11
§ 3. Plückers Entwicklungen	15
§ 4. Allgemeine krummlinige Koordinaten	18
§ 5. Elliptische Koordinaten	19
§ 6. Die geodätischen Linien auf Flächen zweiten Grades	25
§ 7. Fadenkonstruktionen von Graves und Staude	32
§ 8. Die Lehre von den Kreisen und Kugeln. Geschichtliches	36
§ 9. Elementare Kreisgeometrie	38
§ 10. Die Transformation durch reziproke Radien	43
§ 11. Pentasphärische Koordinaten	49
§ 12. Anwendungen der pentasphärischen Koordinaten	53
§ 13. Dupins Zykliken	56
§ 14. Einteilung der bisherigen Gegenstände der analytischen Geometrie	59
§ 15. Bilineare Gleichungen und Dualität	60
§ 16. Das Nullsystem.	62
§ 17. Anwendungen des Nullsystems	66
§ 18. Geometrische Deutung der Differentialgleichungen.	71
Wechsel des Raumelementes	74
§ 19. Plückers allgemeines Prinzip	74
§ 20. Linienkoordinaten	80
§ 21. Die linearen Mannigfaltigkeiten der Liniengeometrie	85
§ 22. Der lineare Komplex als Raumelement	90
§ 23. Heranziehung von Hilfsmitteln aus der Theorie der quadratischen Formen	96
§ 24. Vergleich mit den pentasphärischen Koordinaten.	100
§ 25. Lies Kugelgeometrie.	105
§ 26. Beziehungen zwischen Asymptotenlinien und Krümmungslinien	110
§ 27. Geschichtliche Bemerkungen zur Kugelgeometrie	115
§ 28. Heranziehung mehrdimensionaler Räume durch Graßmann und Cayley	117
§ 29. Kreise im Raume, das Pentazykel von Stephanos	121
§ 30. Die Konnexionen von Clebsch	123
§ 31. Die Grundformeln für die Krümmung der Flächen.	129
§ 32. Einführung von Ebenenkoordinaten in Differentialgleichungen	132

Zweiter Hauptteil.

Lehre von den Transformationen.

Punkttransformationen des Raumes	136
§ 33. Lineare Transformationen	137
§ 34. Perspektograph und Storchschnabel.	142
§ 35. Reliefperspektive und malerische Perspektive	147
§ 36. Newtons Einteilung der Kurven dritter Ordnung	149
§ 37. Poncelet und die Lehre vom Doppelverhältnis.	151
§ 38. Steiner und Chasles	154
§ 39. Cayley und Staudt	157
§ 40. Stellung zur Invariantentheorie.	160
§ 41. W-Kurven von Klein und Lie.	166
§ 42. Projektive Differentialgeometrie	173
§ 43. Imaginärtheorie der konfokalen Kegelschnitte	178
§ 44. Imaginäre Kollineationen	182
§ 45. Stereographische Projektion	184
§ 46. Isotrope Kurven und winkeltreue Abbildung von Flächen	188
§ 47. Lies Lehre von den Minimalflächen.	191
§ 48. Erneute Betrachtung der stereographischen Projektion und der tetra- zyklischen Koordinaten	193
§ 49. Die Gruppe der Kreisverwandtschaften von Möbius	195
§ 50. Liouvilles Satz über die winkeltreuen Abbildungen des Raumes	197
§ 51. Hesses Übertragungsprinzip	200
§ 52. Ebene Konfigurationen	202
§ 53. Die reziproken Kräftepläne der graphischen Statik.	203
§ 54. Allgemeine analytische Punkttransformation	207
§ 55. Klassifikation der Ausdrücke Pfaffs	209
§ 56. Das Problem von Pfaff	213
§ 57. Einführung quadratischer Differentialformen durch Gauß	215
§ 58. Beltramis Differentiatoren	216
§ 59. Riemanns Raum	221
§ 60. Weitere Literatur über quadratische Differentialformen	224
§ 61. Cremonatransformationen	227
Wechsel des Raumelementes	234
§ 62. Die dualistische Transformation als Berührungstransformation	234
§ 63. Erste Einführung der allgemeinen Berührungstransformationen	237
§ 64. Die beiden kugelgeometrischen Transformationsgruppen	243
§ 65. Die isotrope Projektion des R_{n+1} auf den R_n	246
§ 66. Die isotrope Projektion des R_3 auf den R_2	248
§ 67. Die Gruppe Laguerres und die äquilongen Abbildungen in der Ebene	253
§ 68. Übertragung auf höhere Dimensionen	257
§ 69. Die Gruppe der Liniengeometrie Plückers	262
§ 70. Der Zusammenhang zwischen Plückers Liniengeometrie und Lies Kugel- geometrie als Berührungstransformation	266
§ 71. Elementargeometrische Betrachtung der Geraden-Kugel-Transformation	270
§ 72. Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung	274
§ 73. Partielle Differentialgleichungen der Linien- und Kugelgeometrie	286
§ 74. Allgemeine Theorie der Berührungstransformationen	292
§ 75. Weitere Beispiele von Berührungstransformationen	298
§ 75, 1. Fußpunktkurven	299
§ 75, 2. Verzahnung	300

§ 75, 3. Umfangstreue Berührungstransformationen	301
§ 75, 4. Variation der Konstanten	303
§ 76. Invariantentheorie der Berührungstransformationen	306

Dritter Hauptteil.

Beispiele geometrischer Forschung aus den letzten Jahrzehnten.

Ergänzungen.

I. E. Studys Liniengeometrie	310
§ 77. E. Studys liniengeometrisches Übertragungsprinzip	310
§ 78. Liniengeometrisches Gegenstück der dualen Projektivitäten in der Ebene	315
§ 79. Liniengeometrisches Gegenstück der dualen Kreisverwandtschaften.	
Literatur	318
§ 80. Euklidische Abbildung der elliptischen nichteuklidischen Raumgeometrie	323
§ 81. Die kinematische Abbildung	328
II. J. Radons mechanische Herleitung des Parallelismus von T. Levi-Civita	331
§ 82. Die Bewegungsgleichungen	333
§ 83. Asymptotische Integration	336
§ 84. Diskussion. Die Parallelverschiebung	339
§ 85. Anwendung der Parallelverschiebung in der Flächentheorie	341
§ 86. Herleitung der Parallelverschiebung aus der inneren Geometrie der Fläche	344
III. Aus der Topologie: E. Artins Zöpfe	346
§ 87. Alexanders Beweis für Tietzes Deformationssatz	348
§ 88. Das Knotenproblem	350
§ 89. Die Gruppe der Zöpfe	353
§ 90. Die definierenden Relationen	356
§ 91. Der geschlossene Zopf	359
§ 92. Das freie Produkt von Gruppen	361
§ 93. Dreierzöpfe	364
IV. Über die Differentialgleichungen von Monge. Ihre Beziehun- gen zur Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und zur Variationsrechnung	367
§ 94. Die Hamiltonsche Gleichung	367
§ 95. Zugehörige Berührungstransformationen	376
V. Einleitung in die Elementarteilerttheorie	379
§ 96. Lineare Substitutionen und die Matrizenrechnung	380
§ 97. Geometrische Deutung der linearen Substitutionen	381
§ 98. Normalform linearer Transformationen	383
§ 99. Paare quadratischer Formen	389
Namen- und Stichwortverzeichnis	394