DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

BAND 2

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH

THEORIE UND ANWENDUNG DER UNENDLICHEN REIHEN

VON

DR. KONRAD KNOPP †
ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER
UNIVERSITÄT TÜBINGEN

FÜNFTE BERICHTIGTE AUFLAGE

MIT 14 TEXTFIGUREN

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH

Geschäftsführende Herausgeber:
Prof. Dr. B. Eckmann
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Prof. Dr. B. L. van der Waerden
Mathematisches Institut der Universität Zürich

ISBN 978-3-642-49377-5 ISBN 978-3-642-49655-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-49655-4

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag , Berlin · Göttingen · Heidelberg 1964
Softcover reprint of the hardcover 5th edition 1964

Library of Congress Catalog Card Number 64—8759

Titel-Nr. 4985

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Ausgangspunkt, Umrisse und Ziel einer Lehre von den unendlichen Reihen liegen nicht fest. Auf der einen Seite kann die gesamte höhere Analysis als ein Anwendungsfeld ihrer Theorie angesehen werden, weil alle Grenzprozesse — einschließlich Differentiation und Integration — auf die Untersuchung unendlicher Zahlenfolgen oder Reihen zurückgehen; auf der anderen Seite, in einem strengsten, aber darum auch engsten Sinne, gehören in ein Lehrbuch der unendlichen Reihen nur deren Definition, die Handhabung der damit verbundenen Symbolik und die Konvergenztheorie.

Unter Beschränkung auf diese Teile behandeln die „Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre", Band I, Abteilung 2, von A. PRINGSHEIM unsern Gegenstand. Es konnte nicht die Absicht sein, mit dem vorliegenden Buche etwas Ähnliches zu bieten.

Meine Ziele waren andere: Alle Betrachtungen und Untersuchungen der höheren Analysis zusammenzufassen, bei denen die unendlichen Reihen im Vordergrund des Interesses stehen, möglichst voraussetzungsfrei, von den ersten Anfängen an, aber fortführend bis an die ausgedehnte Front der gegenwärtigen Forschung, und alles dies möglichst lebendig und leicht faßlich, doch selbstverständlich ohne den geringsten Verzicht auf Exaktheit, dargestellt, um so dem Studierenden eine bequeme Einführung und einen reichen Einblick in das vielgestaltige und fesselnde Stoffgebiet zu geben, — das schwebte mir vor.

Aber der Stoff wuchs unter den Händen und widersetzte sich der Gestaltung. Um etwas Handlich-Brauchbares zu schaffen, mußte darum das Gebiet beschränkt werden. Dabei setzte unvermeidlich eine gewisse Willkür ein, deren Walten nun die Form des Buches und damit seinen Wert bestimmt. Doch leiteten mich immer die Erfahrungen, die ich im Unterricht gesammelt — das gesamte Stoffgebiet habe ich mehrfach in Vorlesungen und Übungen an den Universitäten Berlin und Königsberg behandelt —, und die Zwecke, für die das Buch bestimmt sein soll: *Es soll dem Studierenden bei den Vorlesungen eine zuverlässige und gründliche Hilfe bieten und gleichzeitig zur Durcharbeitung des ganzen Stoffes im Selbststudium geeignet sein.*

Dies letzte lag mir besonders am Herzen und mag die Form der Darstellung begreiflich machen. Da es, besonders für die jüngeren Semester, im allgemeinen leichter ist, eine rein mathematische Deduktion nachzuprüfen, als das Zwangsläufige des Gedankenzusammenhanges zu erkennen, habe ich mich stets bei den *begrifflichen Schwierigkeiten* länger aufgehalten und sie durch mannigfache Erläuterungen zu beheben versucht. Und ist mir dadurch auch viel Raum für Sachliches verloren gegangen, so hoffe ich doch, daß es der Lernende mir danken wird.

Für unumgänglich habe ich es gehalten, mit einer Einführung in die Lehre von den reellen Zahlen zu beginnen, damit die ersten Konvergenztatsachen auf einem soliden Boden wachsen. Hieran schließt sich eine schon ziemlich weitführende Theorie der Zahlenfolgen und endlich die eigentliche Lehre von den unendlichen Reihen, die dann gleichsam in zwei Stockwerken aufgebaut wird, einem Unterbau, in dem mit den bescheidensten Mitteln gearbeitet und doch schon der klassische Teil der ganzen Lehre, etwa bis zu CAUCHYs Analyse algébrique, dargelegt wird, und einem Oberbau, der dann von ihrer weiteren Entwicklung im 19. Jahrhundert ein Bild zu geben versucht.

Aus den schon genannten Gründen fehlen viele Gegenstände, denen ich an und für sich gern noch Aufnahme gewährt hätte. Die halbkonvergenten Reihen, die EULERsche Summenformel, Eingehenderes über die Gammafunktion, der Problemenkreis der hypergeometrischen Reihe, die Theorie der Doppelreihen, die neueren Untersuchungen über Potenzreihen und besonders eine gründlichere Ausgestaltung des letzten Kapitels über divergente Reihen, alles dies mußte ich — schweren Herzens — beiseite lassen. Dagegen habe ich Zahlenfolgen und Reihen mit komplexen Gliedern unbedingt aufnehmen zu müssen geglaubt. Da aber ihre Theorie derjenigen im Reellen fast parallel läuft, habe ich von Anfang an alle hierfür in Betracht kommenden Definitionen und Sätze so formuliert und bewiesen, daß sie ungeändert in Gültigkeit bleiben mögen die auftretenden „beliebigen“ Zahlen reell oder komplex sein. Das Zeichen ° soll diese Definitionen und Sätze noch besonders kenntlich machen.

Bei der Auswahl der Aufgaben — die übrigens auf Originalität keinerlei Anspruch machen, bei deren Zusammenstellung vielmehr die vorhandene Literatur ausgiebig benutzt worden ist — habe ich mich bemüht, die praktische Verwendung in den Vordergrund zu stellen und ein Spiel mit theoretischen Finessen beiseite zu lassen. Darum findet man z. B. besonders zahlreiche Aufgaben zum VIII. Kapitel und nur ganz wenige zum IX. Kapitel. Die Lösungen der Aufgaben oder auch nur Anleitungen dazu beizufügen, verbot leider der Raum.

Die wichtigsten Abhandlungen, zusammenfassenden Darstellungen und Lehrbücher über unendliche Reihen sind am Schlusse des Buches vor dem Register aufgeführt.

Königsberg, September 1921.

Aus den Vorworten zur zweiten und dritten Auflage.

Da die zweite Auflage so überraschend schnell notwendig geworden ist, durfte angenommen werden, daß die erste im großen und ganzen den richtigen Weg gegangen war. Es ist daher ihre Gesamtanlage unverändert beibehalten, im einzelnen aber Seite für Seite im Ausdruck und in der Beweisführung gebessert worden.

Vollständig neu bearbeitet und wesentlich erweitert wurde das letzte Kapitel über *divergente Reihen*, das nun schon einigermaßen in die Theorie selbst hineinführt und von der gegenwärtigen Arbeit auf diesem Gebiete ein Bild gibt.

Die dritte Auflage unterscheidet sich von der zweiten hauptsächlich dadurch, daß es möglich geworden ist, ein neues Kapitel über die Eulersche Summenformel und Asymptotische Entwicklungen anzufügen, das bei den beiden ersten Auflagen nur ungern beiseite gelassen worden war. Doch konnte dieses wichtige Kapitel inzwischen in ähnlicher Form in die englische Übersetzung des Buches aufgenommen werden, die 1928 bei Blackie & Son Limited, London and Glasgow, erschienen ist.

Darüber hinaus sind alle Teile des Buches wiederum sorgfältig durchgearbeitet und alle Beweise, bei denen die Fortschritte der Wissenschaft oder die Erfahrungen des Unterrichts dies ermöglichten, verbessert oder vereinfacht worden. Dies gilt insbesondere von den Beweisen der Sätze **269** und **287**.

Königsberg, Dezember 1923; Tübingen, März 1931.

Vorwort zur vierten Auflage.

Mit Rücksicht auf die Zeitverhältnisse wurde bei der vierten Auflage von größeren Änderungen abgesehen. Doch wurde das Buch erneut durchgearbeitet und an zahlreichen Stellen sind Einzelheiten verbessert, Unebenheiten beseitigt und manche Beweise vereinfacht worden. Die Verweise auf die Literatur wurden bis zur Gegenwart ergänzt.

Tübingen, Juli 1947.

Konrad Knopp.

Inhaltsverzeichnis.

Seite
Einleitung 1

Erster Teil.

Reelle Zahlen und Zahlenfolgen.

I. Kapitel.

Grundsätzliches aus der Lehre von den reellen Zahlen.

§ 1. Das System der rationalen Zahlen und seine Lücken 3
§ 2. Rationale Zahlenfolgen 14
§ 3. Die irrationalen Zahlen 24
§ 4. Vollständigkeit und Einzigkeit des Systems der reellen Zahlen . . . 34
§ 5. Die Systembrüche und der DEDEKINDsche Schnitt 38
Aufgaben zum I. Kapitel (1—8) 43

II. Kapitel.

Reelle Zahlenfolgen.

§ 6. Beliebige reelle Zahlenfolgen und Nullfolgen 44
§ 7. Potenz, Wurzel und Logarithmus. Spezielle Nullfolgen 49
§ 8. Konvergente Zahlenfolgen. Der CAUCHYsche Grenzwertsatz und seine Verallgemeinerungen 64
§ 9. Die beiden Hauptkriterien 79
§ 10. Häufungswerte und Häufungsgrenzen 90
§ 11. Unendliche Reihen, Produkte und Kettenbrüche 100
Aufgaben zum II. Kapitel (9—33) 108

Zweiter Teil.

Grundlagen der Theorie der unendlichen Reihen.

III. Kapitel.

Reihen mit positiven Gliedern.

§ 12. Das erste Hauptkriterium und die beiden Vergleichskriterien 112
§ 13. Das Wurzel- und das Quotientenkriterium 118
§ 14. Reihen mit positiven monoton abnehmenden Gliedern 121
Aufgaben zum III. Kapitel (34—44) 126

IV. Kapitel.

Reihen mit beliebigen Gliedern.

§ 15. Das zweite Hauptkriterium und das Rechnen mit konvergenten Reihen 127
§ 16. Absolute Konvergenz. Umordnung von Reihen 137
§ 17. Multiplikation unendlicher Reihen 146
Aufgaben zum IV. Kapitel (45—63) 149

V. Kapitel.

Potenzreihen.

Seite
§ 18. Der Konvergenzradius 151
§ 19. Funktionen einer reellen Veränderlichen 158
§ 20. Haupteigenschaften der durch Potenzreihen dargestellten Funktionen 172
§ 21. Das Rechnen mit Potenzreihen 181
Aufgaben zum V. Kapitel (64—73) 191

VI. Kapitel.

Die Entwicklungen der sog. elementaren Funktionen.

§ 22. Die rationalen Funktionen 192
§ 23. Die Exponentialfunktion 194
§ 24. Die trigonometrischen Funktionen 202
§ 25. Die binomische Reihe 213
§ 26. Die logarithmische Reihe 217
§ 27. Die zyklometrischen Funktionen 219
Aufgaben zum VI. Kapitel (74—84) 221

VII. Kapitel.

Unendliche Produkte.

§ 28. Produkte mit positiven Gliedern 224
§ 29. Produkte mit beliebigen Gliedern. Absolute Konvergenz 228
§ 30. Zusammenhang zwischen Reihen und Produkten. Bedingte und unbedingte Konvergenz 233
Aufgaben zum VII. Kapitel (85—99) 235

VIII. Kapitel.

Geschlossene und numerische Auswertung der Reihensumme.

§ 31. Problemstellung 237
§ 32. Geschlossene Auswertung der Reihensumme 240
§ 33. Reihentransformationen 249
§ 34. Numerische Berechnungen 256
§ 35. Anwendung der Reihentransformationen bei numerischen Berechnungen 269
Aufgaben zum VIII. Kapitel (100—132) 276

Dritter Teil.

Ausbau der Theorie.

IX. Kapitel.

Reihen mit positiven Gliedern.

§ 36. Genauere Untersuchung der beiden Vergleichskriterien 283
§ 37. Die logarithmischen Vergleichsskalen 287
§ 38. Spezielle Vergleichskriterien II. Art 293
§ 39. Die Sätze von Abel, Dini und Pringsheim und neue Herleitung der logarithmischen Vergleichsskalen aus ihnen 299
§ 40. Reihen mit positiven monoton abnehmenden Gliedern 303
§ 41. Allgemeine Bemerkungen zur Konvergenztheorie der Reihen mit positiven Gliedern 307
§ 42. Systematisierung der allgemeinen Konvergenztheorie 314
Aufgaben zum IX. Kapitel (133—141) 320

X. Kapitel.

Reihen mit beliebigen Gliedern.

Seite

§ 43. Konvergenzkriterien für Reihen mit beliebigen Gliedern 322
§ 44. Umordnung nur bedingt konvergenter Reihen 327
§ 45. Multiplikation nur bedingt konvergenter Reihen 330
Aufgaben zum X. Kapitel (142—153) 334

XI. Kapitel.

Reihen mit veränderlichen Gliedern (Funktionenfolgen).

§ 46. Gleichmäßige Konvergenz 336
§ 47. Gliedweise Grenzübergänge 348
§ 48. Kriterien für gleichmäßige Konvergenz 355
§ 49. Fouriersche Reihen 360
A. Die Eulerschen Formeln 360
B. Das Dirichletsche Integral 367
C. Konvergenzbedingungen 376
§ 50. Anwendungen der Theorie der FOURIERschen Reihen 384
§ 51. Produkte mit veränderlichen Gliedern 393
Aufgaben zum XI. Kapitel (154—173) 398

XII. Kapitel.

Reihen mit komplexen Gliedern.

§ 52. Komplexe Zahlen und Zahlenfolgen 401
§ 53. Reihen mit komplexen Gliedern 409
§ 54. Potenzreihen. Analytische Funktionen 415
§ 55. Die elementaren analytischen Funktionen 424
I. Die rationalen Funktionen 424
II. Die Exponentialfunktion 425
III. $\cos z$ und $\sin z$ 428
IV. $\operatorname{ctg} z$ und $\operatorname{tg} z$ 431
V. Die logarithmische Reihe 433
VI. Die arc sin-Reihe 435
VII. Die arctg-Reihe 436
VIII. Die Binomialreihe 437
§ 56. Reihen mit veränderlichen Gliedern. Gleichmäßige Konvergenz. WEIERSTRASSscher Doppelreihensatz 442
§ 57. Produkte mit komplexen Gliedern 448
§ 58. Spezielle Klassen von Reihen analytischer Funktionen 456
A. DIRICHLETsche Reihen 456
B. Fakultätenreihen 462
C. LAMBERTsche Reihen 464
Aufgaben zum XII. Kapitel (174—199) 468

XIII. Kapitel.

Divergente Reihen.

§ 59. Allgemeine Bemerkungen über divergente Zahlenfolgen und die Verfahren zu ihrer Limitierung 473
§ 60. Das C- und H-Verfahren 495
§ 61. Anwendung der C_1-Summierung auf die Theorie der FOURIERschen Reihen 510
§ 62. Das A-Verfahren 516
§ 63. Das E-Verfahren 525
Aufgaben zum XIII. Kapitel (200—216) 534

XIV. Kapitel.

Die Eulersche Summenformel. Asymptotische Entwicklungen.

Seite

§ 64. Die Eulersche Summenformel 536
A. Die Summenformel 536
B. Anwendungen 544
C. Restabschätzungen 550
§ 65. Asymptotische Reihen 554
§ 66. Spezielle asymptotische Entwicklungen 561
A. Beispiele zum Entwicklungsproblem 561
B. Beispiele für das Summierungsproblem 567
Aufgaben zum XIV. Kapitel (217—225) 572

Literatur 575

Namen- und Sachverzeichnis 576