

BEGRÜNDUNG  
DER FUNKTIONENTHEORIE  
AUF ALTEN UND NEUEN WEGEN

VON

DR. LOTHAR HEFFTER

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT FREIBURG

ZWEITE WESENTLICH VERBESSERTE AUFLAGE

MIT 13 ABBILDUNGEN IM TEXT



SPRINGER-VERLAG  
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

1960

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG  
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN

OHNE AUSDRÜCKLICHE GENEHMIGUNG DES VERLAGES IST ES AUCH NICHT  
GESTATTET, DIESES BUCH ODER TEILE DARAUS AUF PHOTOMECHANISCHEM  
WEGE (PHOTOKOPIE, MIKROKOPIE) ZU VERVIELFÄLTIGEN ·

COPYRIGHT 1955 BY SPRINGER VERLAG OHG.  
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

© BY SPRINGER-VERLAG OHG.  
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG 1960

ISBN-13: 978-3-540-02553-5      e-ISBN-13: 978-3-642-49164-1  
DOI: 10.1007/978-3-642-49164-1

BRÜHLSCHE UNIVERSITÄTSDRUCKEREI GIESSEN

DEM ANDENKEN AN  
WILHELM SÜSS  
DEN AM 21. MAI 1958 ENTSCHLAFENEN FREUND  
GEWIDMET

## Vorwort

Unter „Begründung der Funktionentheorie“ verstehen wir die auf möglichst elementarem Weg gewonnene Darstellung einer Funktion  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  von  $z = x + yi$  durch gewöhnliche Potenzreihen, wenn über  $f(z)$  gewisse möglichst elementare Voraussetzungen gemacht werden. Diese können sehr verschiedener Art sein. Während aber wohl alle Lehrbücher der Funktionentheorie nur einen der beiden „klassischen“ Wege verfolgen, bei denen die Existenz der Ableitung  $f'(z)$  (GOURSAT) oder deren Existenz und Stetigkeit (CAUCHY) den Ausgangspunkt bildet, werden hier außer jenen beiden noch vier andere Wege bis zu dem genannten Endziel gebahnt. Einer von ihnen (MORERA 1901, § 26) wird hauptsächlich nur aus historischem Interesse durchgeführt. Die drei anderen rühren in der vorliegenden Gestalt vom Verfasser her und gehen von geringeren Voraussetzungen aus als GOURSAT, d. h. der Existenz von  $f'(z)$ . Nur einer von ihnen war schon in der Schrift „Kurvenintegrale und Begründung der Funktionentheorie“, Springer-Verlag 1948, enthalten. Damit war von mir ein Wunsch erfüllt worden, in dem sich BOLZA, wie er mir erzählte, 1912 in London mit HILBERT begegnet war.

Wichtige Teile der Funktionentheorie beginnen erst *nach* der Begründung, wenn man also schon im Besitz der Potenzreihen für  $f(z)$  ist. Auf diese Teile gehen wir nicht mehr ein, da wir ja nicht ein „Lehrbuch der Funktionentheorie“, sondern gewissermaßen nur den *Anfang* eines solchen auf sehr verschiedenen Wegen liefern wollen.

*Abschnitt A* bringt *Vorkenntnisse*, die unmittelbar oder mittelbar wirklich benutzt werden, und zwar mit *Beweisen* der angeführten Sätze. Auch werde ausdrücklich betont, daß außer Kreisen keine *gekrümmten* ebenen Linien und über solche erstreckten Integrale bei uns auftreten. Durch diese beiden Umstände ist die vorliegende Schrift bereits für Studenten vom 2. Semester an lesbar.

Der *Hauptabschnitt B* bringt nach obigem sechs verschiedene ältere, neuere und ganz neue Eingänge in die Funktionentheorie. Der Anfänger möge zunächst § 25 und 26 überschlagen. Den gereiften Forscher aber werden namentlich die Kap. III—VII interessieren.

*Abschnitt C* stellt einen Beitrag zur *Geschichte der Begründung der Funktionentheorie* dar in Gestalt einer reichhaltigen, chronologisch geordneten Liste einschlägiger Originalliteratur, jeweils mit kurzen Inhaltsangaben. Auch dieser Abschnitt dürfte gerade den reiferen Leser interessieren.

Herrn Professor Dr. G. L. TAUTZ in Freiburg schulde ich herzlichen Dank für die kritische Durchsicht großer Teile des Manuskriptes der ersten Auflage und viele gute Ratschläge. — Ebenso dankbar bin ich Herrn Professor Dr. H. GERICKE in Freiburg, der die Korrekturen mitgelesen und auch dabei noch sehr viele wesentliche Verbesserungen veranlaßt hat. — Beiden Herren Kollegen schulde ich auch für ihre Hilfe bei der neuen Auflage herzlichen Dank.

Die *Abbildungen* hat, wie bei allen meinen Schriften der letzten Jahrzehnte, meine Frau, Dr. GERTRAUD HEFFTER, gezeichnet.

Freiburg i. B. 1959

LOTHAR HEFFTER

# Inhaltsverzeichnis

## A. Vorkenntnisse

§ 1. Unendliche Folgen . . . . .	1
§ 2. Unendliche Reihen . . . . .	2
§ 3. Reelle Funktionen $f(x)$ einer reellen Veränderlichen $x$ . . . . .	5
§ 4. Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x) dx$ . . . . .	9
§ 5. Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze und das unbestimmte Integral. . . . .	13
§ 6. Paare von reellen Veränderlichen $x, y$ . . . . .	14
§ 7. Reelle Funktionen $f(x, y)$ der reellen Veränderlichen $x, y$ . . . . .	15
§ 8. Totale und partielle Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x, y)$ . . . . .	17
§ 9. Treppenintegral $\int_{a, \alpha}^{b, \beta} (f(x, y) dx + g(x, y) dy)$ . . . . .	18
§ 10. Flächenintegral einer Funktion $f(x, y)$ . . . . .	20
§ 11. Gauss'sche Sätze über Flächenintegral und Randintegral. . . . .	22
§ 12. Komplexe Funktionen einer komplexen Veränderlichen $z \equiv x + yi$ . . . . .	24
§ 13. Komplexe Treppenintegrale $\int_{z_0}^z f(z) dz$ . . . . .	25
§ 14. Potenzreihen und ihr Konvergenzkreis . . . . .	26
§ 15. Eindeutigkeit, Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Potenzreihe . . . . .	28
§ 16. Gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihe. . . . .	30

## B. Sechs verschiedene Wege zur Begründung der Funktionentheorie

I. Definition der „analytischen Funktion“ . . . . .	31
§ 17. Der historische Weg von CAUCHY über WEIERSTRASS zurück zu CAUCHY . . . . .	31
II. Die Wege von CAUCHY 1814 und GOURSAT 1900. . . . .	31
§ 18. Der (alte) Cauchysche Integralsatz . . . . .	31
§ 19. Der Goursatsche Integralsatz . . . . .	34
§ 20. Die Cauchysche Integralformel für $f(z)$ . . . . .	36
§ 21. Potenzreihendarstellung von $f(z)$ . . . . .	37
III. Der Weg von LOOMAN-MENCHOFF 1933 . . . . .	38
§ 22. Der Satz von LOOMAN-MENCHOFF und seine Geschichte . . . . .	38
§ 23. Beweis eines spezialisierten Satzes von LOOMAN-MENCHOFF 1954 . . . . .	39
IV. Ältere Wege bei Voraussetzung eindeutiger Integrierbarkeit von $f(z)$ . . . . .	41
§ 24. Der Satz von MORERA von 1886 . . . . .	41
§ 25. Der Weg von OSGOOD von 1896 . . . . .	42
§ 26. Der Weg von MORERA von 1901 . . . . .	42

V. Der einfachste Weg bei Voraussetzung eindeutiger Integrierbarkeit von $f(z)$ 1936 . . . . .	44
§ 27. Achsenparallel eindeutige Integrierbarkeit von $f dx + g dy$ . . . . .	44
§ 28. Achsenparallel eindeutige Integrierbarkeit von $f(z)$ . . . . .	45
§ 29. Der Hauptsatz dieses Weges . . . . .	46
VI. Ein neuer Weg unter Benutzung von Polarkoordinaten 1951 . . . . .	50
§ 30. Eine allgemeine Eigenschaft jeder analytischen Funktion $f(z)$ . . . . .	50
§ 31. Eine weitere derartige Eigenschaft jeder analytischen Funktion $f(z)$ . . . . .	51
§ 32. Ein entsprechender Eingang in die Funktionentheorie . . . . .	52
§ 33. Umformung der Voraussetzung in Kap. VI . . . . .	54
VII. Vergleich der Voraussetzungen in Kap. II—VI . . . . .	55
§ 34. Vergleich im einzelnen und allgemeine Bemerkungen . . . . .	55
C. Originalliteratur zur Geschichte der Begründung der Funktionentheorie . . . . .	56
Lehrwerke der Funktionentheorie. . . . .	62
Verzeichnis der gebrauchten Begriffe . . . . .	63