

---

# Anfangsunterricht Mathematik

Weitere Bände in dieser Reihe  
<http://www.springer.com/series/8296>

# Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

## Herausgegeben von

Prof. Dr. Friedhelm Padberg  
Universität Bielefeld

## Bisher erschienene Bände (Auswahl):

### Didaktik der Mathematik

- P. Bardy: Mathematisch begabte Grundschulkinder – Diagnostik und Förderung (P)  
M. Franke: Didaktik der Geometrie (P)  
M. Franke/S. Ruwisch: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule (P)  
K. Hasemann/H. Gasteiger: Anfangsunterricht Mathematik (P)  
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe (P)  
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe, Band 2 (P)  
F. Käpnick: Mathematiklernen in der Grundschule (P)  
G. Krauthausen: Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule (P)  
G. Krauthausen/P. Scherer: Einführung in die Mathematikdidaktik (P)  
G. Krummheuer/M. Fetzner: Der Alltag im Mathematikunterricht (P)  
F. Padberg/C. Benz: Didaktik der Arithmetik (P)  
P. Scherer/E. Moser Opitz: Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe (P)  
A.-S. Steinweg: Algebra in der Grundschule – Muster und Strukturen/Gleichungen/funktionale Beziehungen (P)  
  
G. Hinrichs: Modellierung im Mathematikunterricht (P/S)  
  
R. Danckwerts/D. Vogel: Analysis verständlich unterrichten (S)  
G. Greefrath: Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe (S)  
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe I (S)  
F. Padberg: Didaktik der Bruchrechnung (S)  
H.-J. Vollrath/H.-G. Weigand: Algebra in der Sekundarstufe (S)  
H.-J. Vollrath/J. Roth: Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (S)  
H.-G. Weigand/T. Weth: Computer im Mathematikunterricht (S)  
H.-G. Weigand et al.: Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I (S)

### Mathematik

- F. Padberg: Einführung in die Mathematik I – Arithmetik (P)  
F. Padberg: Zahlentheorie und Arithmetik (P)  
  
K. Appell/J. Appell: Mengen – Zahlen – Zahlbereiche (P/S)  
A. Filler: Elementare Lineare Algebra (P/S)  
S. Krauter/C. Bescherer: Erlebnis Elementargeometrie (P/S)  
H. Kütting/M. Sauer: Elementare Stochastik (P/S)  
T. Leuders: Erlebnis Arithmetik (P/S)  
F. Padberg: Elementare Zahlentheorie (P/S)  
F. Padberg/R. Danckwerts/M. Stein: Zahlbereiche (P/S)  
  
A. Büchter/H.-W. Henn: Elementare Analysis (S)  
G. Wittmann: Elementare Funktionen und ihre Anwendungen (S)

P: Schwerpunkt Primarstufe  
S: Schwerpunkt Sekundarstufe

### Weitere Bände in Vorbereitung

---

Klaus Hasemann • Hedwig Gasteiger

# Anfangsunterricht Mathematik

3., überarbeitete und erweiterte Auflage 2014

Klaus Hasemann  
Inst. für Didaktik der Mathematik  
Leibniz-Universität Hannover  
Hannover  
Deutschland

Hedwig Gasteiger  
Mathematisches Institut  
Ludwig-Maximilians-Universität München  
München  
Deutschland

ISBN 978-3-642-39312-9  
DOI 10.1007/978-3-642-40774-1

ISBN 978-3-642-40774-1 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, 2007, 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Planung und Lektorat:* Ulrike Schmickler-Hirzebruch, Barbara Lühker

*Korrektur:* Annette Heß, Lobbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media  
[www.springer-spektrum.de](http://www.springer-spektrum.de)

---

## Vorwort

Der mathematische Anfangsunterricht hat für die Lernentwicklung der Kinder richtungweisende Bedeutung. Diese Erkenntnis ist in der letzten Zeit wieder stärker in den Blick der Öffentlichkeit geraten, unter anderem durch die Diskussion über Ergebnisse internationaler Studien wie PISA (Programme for International Student Assessment, vgl. Baumert et al. 2001) und IGLU (Internationale Grundschul-Lese-Untersuchung, vgl. Bos et al. 2003). In Deutschland hat die Kultusministerkonferenz u. a. mit der Formulierung von verbindlichen Bildungsstandards für die Primarstufe reagiert (KMK 2004).

Mathematisches Lernen, Denken und Verstehen beginnt nicht erst in der Schule. Die Bedeutung und Verwendung von Zahlen erfahren die Kinder bereits in ihren ersten Lebensjahren. Sie sammeln erste geometrische Erfahrungen, wenn sie z. B. auf einen Stuhl klettern, um zu sehen, wie die Welt von oben aussieht. Die Kinder machen diese Erfahrungen selbstverständlich und in spielerischer Form. Sie als mathematische Vorerfahrungen bewusst zu machen und damit mathematische Denkweisen vorzubereiten, ist für die Kinder ein wichtiger Teil der Förderung ihrer kognitiven Entwicklung.

In diesem Buch wird deshalb ausführlich auf die Entwicklung des mathematischen Denkens der Kinder im Vorschulalter und auf Möglichkeiten der Förderungen im Kindergarten eingegangen. Den Hauptteil bilden die Inhalte des Anfangsunterrichts in der Schule: Zahlbegriff und elementares Rechnen, geometrische Fragestellungen sowie Größen und Sachrechnen werden beschrieben, aus unterschiedlichen Perspektiven begründet und in praktischen Beispielen für die Umsetzung im Mathematikunterricht konkretisiert.

Ein Leitgedanke ist dabei, dass Bildungsprozesse anschlussfähig sein müssen. Bei der Förderung der Kinder in der Vorschulzeit sollte berücksichtigt werden, wie der systematische Unterricht in der Schule aufgebaut ist, und Lehrkräfte sollten wissen, welche Aktivitäten in den Kindergärten üblich sind. Das Buch wendet sich deshalb an Lehrerinnen und Lehrer, Erzieherinnen, Studierende und alle am frühen Mathematikunterricht Interessierten.

Die *Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Vorschulalter* ist das Thema des ersten Kapitels. Darin werden sowohl Ergebnisse aus der Entwicklungspsychologie vorgestellt, die als Grundlagen für den Zahlbegriff und für das geometrische Denken der Kinder

von Bedeutung sind, als auch Ergebnisse von Untersuchungen über die Entwicklung ihrer Zählkompetenz. Wir stellen auf der Grundlage empirischer Untersuchungen Verfahren zur Diagnose des mathematischen Entwicklungsstandes der Kinder vor und beschreiben einen Test, mit dem sich die Zahlbegriffsentwicklung in ihrer ganzen Breite erfassen lässt. Im zweiten Kapitel werden Inhalte und Methoden mathematischer Aktivitäten im Kindergarten sowie die *Gestaltung des Überganges in die Grundschule* und die Erwartungen der Kinder an den Unterricht behandelt.

In der Schule lernen die Kinder lesen, schreiben und rechnen – diese so genannten Kulturtechniken sind zentrale Ziele. Skizziert werden didaktische Grundlagen für den mathematischen Anfangsunterricht sowie allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts und Bildungsstandards für den Primarbereich.

Das Kapitel *Zahlen und Operationen im Anfangsunterricht* steht im Mittelpunkt des Buches. Ausführlich und mit vielen konkreten Beispielen und Hinweisen gehen wir darauf ein, wie die Vorkenntnisse der Kinder in der Schule aufgegriffen und für den Unterricht fruchtbar gemacht werden können, welche Möglichkeiten es gibt zur Einführung der Zahlen und des Rechnens mit Zahlen, welche Rolle Materialien und Veranschaulichungsmittel spielen und wie geübt werden kann. Bei den Rechenoperationen stehen Addition und Subtraktion im Mittelpunkt, es wird aber auch auf Multiplikation und Division eingegangen. Ein besonderer Abschnitt ist den Verfahren bei *speziellen Zielgruppen* gewidmet. Gemeint sind damit – unter Berücksichtigung der großen Bandbreite in den Vorkenntnissen, den Fähigkeiten und Fertigkeiten – die Kinder mit erhöhtem Förderbedarf sowie die mit besonders guten Lernvoraussetzungen.

Neben Kenntnissen über Zahlen bringen die Kinder am Schulbeginn vielfältige Vorerfahrungen geometrischer Art mit. Im Kapitel zum *geometrischen Anfangsunterricht* wird begründet, warum und auf welche Weise diese Vorerfahrungen aufgenommen und präzisiert werden sollten und an welchen Inhalten dies geschehen kann. Diese Entwicklung geometrischer Vorstellungen ist auch für die allgemeine Denkentwicklung der Kinder von besonderer Bedeutung; wir gehen deshalb vor allem auf das Entdecken und Darstellen von Mustern und Strukturen ein.

Sieht man sich die Vielfalt der Zahlen in unserer alltäglichen Umwelt genauer an, so findet man sie häufig zusammen mit einer Maßbezeichnung; man spricht auch von *Größen*. Das Rechnen mit Größen ist Teil des *Sachrechnens*. Die Kinder können dabei erkennen, dass Mathematik sowohl anwendbar ist als auch aus praktischen Fragestellungen heraus entwickelt werden kann. Darüber hinaus ist das Umgehen der Kinder mit Sachrechenaufgaben ein sehr guter Indikator für die Art ihres *mathematischen Verständnisses*. Beispiele dazu aus eigenen empirischen Untersuchungen werden vorgestellt, und es werden Folgerungen für den mathematischen Anfangsunterricht gezogen.

Das vorliegende Buch ist nicht allein das Werk der Autoren. Der Anfangsunterricht ist schon seit Jahrhunderten ein spannendes Thema. Viele Erkenntnisse, Ideen und Anregungen, die in der umfangreichen Literatur, in praktischen Ratgebern und in Schulbüchern zu finden sind, wurden aufgenommen.

### **Zur 3. Auflage**

Die 3. Auflage wurde unter Beibehaltung des Konzeptes neu strukturiert und inhaltlich deutlich erweitert. Ein besonderer Schwerpunkt der Neubearbeitung liegt auf dem Mathematiklernen im Übergang von Kindergarten und Grundschule. Zudem wurden zahlreiche neue Erkenntnisse aus dem Bereich der Vorkenntnisuntersuchungen, der Arbeit mit lernschwachen Kindern und zum Mathematiklernen allgemein eingearbeitet. Großen Wert legen wir wie bereits in den früheren Auflagen auf umfassende inhaltliche Darstellungen der unterschiedlichen Bereiche des mathematischen Anfangsunterrichts und auf deren Verbindung zu neueren (und bewährten) Erkenntnissen zum Lehren und Lernen. Die Möglichkeiten der methodischen Umsetzung haben wir mit zahlreichen Beispielen und Bildern, insbesondere auch aus aktuellen Lehrwerken, illustriert. Zwei weitere Neuerungen gibt es noch: Das Buch ist in Teamarbeit entstanden, und es ist nun auch als E-Book erhältlich.

An dieser Stelle möchten wir uns ganz herzlich für die freundliche Aufnahme der früheren Auflagen und für die Hinweise von Leserinnen und Lesern bedanken, die wir gern aufgenommen haben. In diesem Sinne freuen wir uns auch auf Reaktionen zu dieser Neuauflage.

München Juni 2013  
Hamburg, Juni 2013

Hedwig Gasteiger  
Klaus Hasemann

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses bis zum Schulbeginn . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Erkenntnisse aus der Säuglingsforschung . . . . .	2
1.2 Entwicklung des Zahlbegriffs . . . . .	4
1.2.1 Exkurs: Mathematische Präzisierungen der natürlichen Zahlen . . . . .	4
1.2.2 Verschiedene Zahlaspekte . . . . .	9
1.2.3 Entwicklungspsychologische Hintergründe zum Zahlbegriffserwerb . . . . .	12
1.3 Entwicklung der Zählkompetenz . . . . .	17
1.3.1 Anzahlbestimmung durch Zählen . . . . .	18
1.3.2 Zahlwortreihe . . . . .	22
1.4 Vorkenntnisse der Kinder am Schulbeginn . . . . .	24
1.4.1 Vorkenntnisuntersuchungen – ein Überblick . . . . .	24
1.4.2 Arithmetische Vorkenntnisse der Kinder . . . . .	29
1.4.3 Vorkenntnisse in den Bereichen Raum und Form sowie Größen und Messen . . . . .	38
<b>2 Mathematiklernen im Übergang Kindergarten – Grundschule . . . . .</b>	<b>43</b>
2.1 Mathematische Bildung im Kindergarten . . . . .	43
2.1.1 Bedeutung elementarer mathematischer Bildung . . . . .	44
2.1.2 Bildungspolitische Vorgaben und Richtlinien . . . . .	45
2.1.3 Inhalte . . . . .	47
2.1.4 Konzeptionen . . . . .	50
2.2 Der Übergang in die Grundschule . . . . .	57
2.2.1 Die Schuleingangsphase . . . . .	57
2.2.2 Gestaltung des Übergangs . . . . .	58
2.2.3 Erwartungen der Kinder an den Mathematikunterricht . . . . .	60
<b>3 Mathematiklernen in der Schule . . . . .</b>	<b>63</b>
3.1 Verständnis von Lernen . . . . .	63
3.2 Didaktische Grundlagen für den mathematischen Anfangsunterricht . . . . .	66
3.3 Zielperspektiven des Mathematikunterrichts in der Grundschule . . . . .	70



3.3.1	Allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts .....	71
3.3.2	Bildungsstandards für den Primarbereich .....	72
<b>4</b>	<b>Zahlen und Operationen im Anfangsunterricht .....</b>	<b>77</b>
4.1	Zahlbegriffserwerb im Anfangsunterricht .....	77
4.1.1	Historischer Rückblick .....	77
4.1.2	Aufgreifen der Vorkenntnisse .....	83
4.1.3	Vertiefung und Festigung der Zählfähigkeit .....	87
4.1.4	Einführung der Zahlen .....	90
4.1.5	Die Null .....	99
4.1.6	Kleiner-Relation und Aspekte der mathematischen Begriffsbildung .....	102
4.1.7	Erweiterung des Zahlenraumes bis 100 .....	105
4.2	Arbeitsmittel .....	109
4.2.1	Zur Klassifizierung verschiedener Arbeitsmittel .....	109
4.2.2	Materialien zur kardinalen Zahldarstellung .....	113
4.2.3	Materialien zur ordinalen Zahldarstellung .....	115
4.3	Operationsverständnis und Rechnen .....	118
4.3.1	Addition und Subtraktion .....	118
4.3.2	Multiplikation und Division .....	133
4.3.3	Übung .....	140
<b>5</b>	<b>Spezielle Zielgruppen .....</b>	<b>147</b>
5.1	Die Bandbreite mathematischer Fähigkeiten im Anfangsunterricht .....	147
5.2	Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen .....	151
5.2.1	Beobachtung und diagnostische Informationen .....	151
5.2.2	Hinweise zur Förderung .....	155
5.2.3	Die Rolle der Sprache .....	161
5.3	Kinder mit besonders guten Lernvoraussetzungen .....	162
5.3.1	Besondere Begabungen – Begriffsklärung .....	162
5.3.2	Hinweise zur Förderung .....	164
<b>6</b>	<b>Geometrischer Anfangsunterricht .....</b>	<b>169</b>
6.1	Geometrische Vorstellungen und Begriffe .....	170
6.1.1	Die Entwicklung des geometrischen Denkens .....	170
6.1.2	Geometrische Begriffsbildungen .....	173
6.2	Begründung und Zielsetzung des geometrischen Anfangsunterrichts .....	179
6.3	Geometrische Inhalte im Anfangsunterricht .....	182
6.3.1	Formen in der Umwelt .....	182
6.3.2	Formen und ihre Konstruktion .....	184
6.3.3	Geometrische Gesetzmäßigkeiten und Muster .....	189
6.3.4	Operieren mit Formen .....	192
6.3.5	Koordinaten .....	196
6.3.6	Maße und Formeln .....	198
6.3.7	Übersetzung in die Zahl- und Formensprache .....	199

---

<b>7 Größen und Sachrechnen</b> .....	201
7.1 Größen .....	202
7.1.1 Begriffsklärung .....	202
7.1.2 Größen im Anfangsunterricht .....	204
7.2 Sachrechnen .....	211
7.2.1 Ziele und Funktionen .....	211
7.2.2 Typen von Sachaufgaben .....	213
7.2.3 Sachrechnen im Anfangsunterricht .....	214
7.3 Entwicklung des mathematischen Verständnisses .....	225
7.3.1 Schwierigkeit der Aufgaben .....	225
7.3.2 Mathematisches Verständnis fördern .....	228
<b>Literatur</b> .....	239
<b>Sachverzeichnis</b> .....	253