

Grenzen der Mathematik

Dirk W. Hoffmann

Grenzen der Mathematik

Eine Reise durch die Kerngebiete
der mathematischen Logik

2. Auflage

 Springer Spektrum

Prof. Dr. Dirk W. Hoffmann
Hochschule Karlsruhe
Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Moltkestraße 30
76133 Karlsruhe

www.dirkwhoffmann.de

ISBN 978-3-642-34719-1

ISBN 978-3-642-34720-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-34720-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011, 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton

Redaktion: Dr. Michael Zillgitt

Satz: Autorensetz

Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.springer-spektrum.de



Vorwort

Das Unmögliche zu erkennen, ist eine intellektuelle Leistung, die den Menschen einzigartig macht. In der Physik haben uns die Einstein'sche Relativitätstheorie oder die Heisenberg'sche Unschärferelation Grenzen aufgezeigt, die wir niemals überwinden werden. Die Aussagen sind negativ, und gerade deshalb verbreiten sie eine unwiderstehliche Faszination. Es ist das Unmögliche, das uns noch stärker zu fesseln vermag als das Mögliche.

Auch die Mathematik ist von ähnlichen Negativresultaten betroffen. Die mathematische Logik des zwanzigsten Jahrhunderts hat fundamentale Erkenntnisse hervorgebracht, die uns die Grenzen dieser präzisen Wissenschaft in aller Klarheit vor Augen führen. So wissen wir heute, dass sich der Begriff der Wahrheit selbst für so scheinbar einfache Theorien wie die Zahlentheorie nicht in Einklang mit dem Begriff der Beweisbarkeit bringen lässt. Es ist unmöglich, die Mathematik in einem formalen System einzufangen, in dem alle wahren mathematischen Aussagen bewiesen werden können.

Dieses Buch entführt Sie auf eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik. Es ist mein erklärtes Ziel, die Konzepte, Methoden und Ergebnisse dieser Disziplin in verständlicher Form offenzulegen, ohne einen Verlust an Tiefe zu erleiden. Wo immer es möglich ist, habe ich versucht, die Definitionen und Sätze mit Beispielen zu motivieren und durch zahlreiche Querbezüge in ihren sachlichen und historischen Kontext einzuordnen. Beweise von Sätzen, die nur am Rand eine Rolle spielen, sind bewusst nur skizzenhaft aufgenommen, oder es wird darauf hingewiesen, wo ein Beweis nachgeschlagen werden kann. In diesem Sinn kann das vorliegende Buch die formal präzise Literatur aus dem Bereich der mathematischen Logik nicht an jeder Stelle ersetzen – und will es auch gar nicht. Allem Anderen voran möchte ich die Faszination transportieren, die dieses Teilgebiet der Mathematik unzweifelhaft ausstrahlt. Sie, liebe Leser, müssen beurteilen, inwieweit mir dies gelungen ist.

Vorwort zur zweiten Auflage

Nach dem Erscheinen der Erstauflage habe ich eine Vielzahl an Zuschriften erhalten, für die ich mich an dieser Stelle herzlich bedanke. Die positive Resonanz hat mich in der Überzeugung bestärkt, einen didaktisch sinnvollen Ansatz gewählt zu haben.

Für die Neuauflage habe ich das ursprüngliche Manuskript an vielen Stellen geändert. Die meisten Neuerungen sind kleinerer Natur; sie korrigieren bekannte Fehler, die sich unbemerkt in die Erstauflage geschlichen hatten. Größere Änderungen hat das Herzstück dieses Buchs, das Kapitel *Beweistheorie*, erfahren. Neu hinzugekommen sind Abschnitte über das Diagonalisierungslemma, das Wahrheitsprädikat von Tarski, das Berry-Paradoxon und den Satz von Löb; all diese Themen wurden in der Erstauflage aus Platzgründen noch nicht behandelt. Ferner habe ich die Übungsteile mancher Kapitel um die eine oder andere neue Aufgabe ergänzt.

Ich möchte die Gelegenheit nutzen, Herrn Prof. Dr. Heiko Körner und Herrn Andreas Rychen meinen Dank auszusprechen. Ihre kritische Durchsicht der ersten Auflage hat dazu geführt, dass es zahlreiche kleinere und größere Fehler nicht in die zweite Auflage geschafft haben. Ebenso herzlich bedanke ich mich bei Herrn Dr. Andreas Rüdinger und Frau Bianca Alton vom Springer Verlag. Die gewohnt angenehme und kompetente Zusammenarbeit hat mir nicht nur bei diesem Buchprojekt viel Freude bereitet.

Kein Buch ist jemals perfekt! Für Hinweise zu Verbesserungsmöglichkeiten oder Fehlern bin ich jedem aufmerksamen Leser dankbar.

Karlsruhe, im Oktober 2012

Dirk W. Hoffmann

Symbolwegweiser



Definition



Satz, Lemma, Korollar



Leichte Übungsaufgabe



Mittelschwere Übungsaufgabe



Schwere Übungsaufgabe

Lösungen zu den Übungsaufgaben

In wenigen Schritten erhalten Sie die Lösungen zu den Übungsaufgaben:

1. Gehen Sie auf die Webseite www.dirkwhoffmann.de/GM
2. Geben Sie den neben der Aufgabe abgedruckten Webcode ein.
3. Die Musterlösung wird als PDF-Dokument angezeigt.

Alternativ können Sie ein PDF-Dokument abrufen, das alle Musterlösungen gesammelt enthält.



Inhaltsverzeichnis

1	Historische Notizen	1
1.1	Wahrheit und Beweisbarkeit	1
1.2	Der Weg zur modernen Mathematik	7
1.2.1	Rätsel des Kontinuums	7
1.2.2	Auf den Spuren der Unendlichkeit	13
1.2.3	Macht der Symbole	27
1.2.4	Aufbruch in ein neues Jahrhundert	31
1.2.5	Grundlagenkrise	36
1.2.6	Axiomatische Mengenlehre	42
1.2.7	Hilberts Programm und Gödels Beitrag	44
1.2.8	Grenzen der Berechenbarkeit	53
1.2.9	Auferstanden aus Ruinen	61
1.3	Übungsaufgaben	67
2	Formale Systeme	71
2.1	Definition und Eigenschaften	71
2.2	Entscheidungsverfahren	83
2.3	Aussagenlogik	87
2.3.1	Syntax und Semantik	87
2.3.2	Aussagenlogischer Kalkül	93
2.4	Prädikatenlogik erster Stufe	103
2.4.1	Syntax und Semantik	104
2.4.2	Prädikatenlogischer Kalkül	109
2.5	Prädikatenlogik mit Gleichheit	112
2.6	Prädikatenlogik höherer Stufe	117
2.6.1	Syntax und Semantik	117
2.6.2	Henkin-Interpretation	121
2.7	Übungsaufgaben	124
3	Fundamente der Mathematik	133
3.1	Peano-Arithmetik	134
3.1.1	Syntax	134
3.1.2	Semantik	135
3.1.3	Axiome und Schlussregeln	139

3.2	Axiomatische Mengenlehre	147
3.2.1	Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre	149
3.2.1.1	ZF-Axiome	150
3.2.1.2	Das Auswahlaxiom	158
3.2.1.3	Mengenlehre als Fundament der Mathematik	164
3.2.1.4	Einbettung der natürlichen Zahlen	172
3.2.2	Ordinalzahlen	174
3.2.2.1	Definition und Eigenschaften	174
3.2.2.2	Der Unendlichkeit entgegen	179
3.2.2.3	Ordnungstypen und Wohlordnungen	186
3.2.2.4	Transfinite Induktion	189
3.2.3	Kardinalzahlen	192
3.3	Übungsaufgaben	194
4	Beweistheorie	199
4.1	Gödel'sche Unvollständigkeitssätze	199
4.2	Der erste Unvollständigkeitssatz	200
4.2.1	Arithmetisierung der Syntax	204
4.2.2	Primitiv-rekursive Funktionen	209
4.2.3	Arithmetische Repräsentierbarkeit	211
4.2.4	Gödels Diagonalargument	218
4.2.5	Rossers Beitrag	225
4.2.6	Das Diagonalisierungslemma	228
4.2.7	Das Wahrheitsprädikat von Tarski	233
4.2.8	Das Berry-Paradoxon	238
4.3	Der zweite Unvollständigkeitssatz	242
4.3.1	Hilbert-Bernays-Löb-Kriterien	245
4.3.2	Der Satz von Löb	247
4.4	Gödels Sätze richtig verstehen	252
4.5	Der Satz von Goodstein	258
4.6	Übungsaufgaben	265
5	Berechenbarkeitstheorie	269
5.1	Berechnungsmodelle	270
5.1.1	Turing-Maschinen	270
5.1.1.1	Erweiterungen des Basismodells	274
5.1.1.2	Alternative Beschreibungsformen	276
5.1.1.3	Universelle Turing-Maschine	279
5.1.2	Registermaschinen	284
5.2	Die Church'sche These	287
5.3	Grenzen der Berechenbarkeit	294
5.3.1	Das Halteproblem	294

5.3.2	Der Satz von Rice	297
5.4	Folgen für die Mathematik	299
5.4.1	Unentscheidbarkeit der PL1	300
5.4.2	Unvollständigkeit der Arithmetik	307
5.4.3	Hilberts zehntes Problem	315
5.4.3.1	Diophantische Repräsentierbarkeit	318
5.4.3.2	Codierung von Registermaschinen	320
5.5	Übungsaufgaben	331
6	Algorithmische Informationstheorie	339
6.1	Algorithmische Komplexität	340
6.2	Die Chaitin'sche Konstante	348
6.3	Unvollständigkeit formaler Systeme	358
6.4	Übungsaufgaben	361
7	Modelltheorie	365
7.1	Meta-Resultate zur Prädikatenlogik	366
7.1.1	Modellexistenzsatz	369
7.1.2	Kompaktheitssatz	371
7.1.3	Satz von Löwenheim-Skolem	375
7.2	Nichtstandardmodelle von PA	378
7.2.1	Abzählbare Nichtstandardmodelle	379
7.2.2	Überabzählbare Nichtstandardmodelle	382
7.3	Das Skolem-Paradoxon	389
7.4	Boolesche Modelle	396
7.4.1	Definition und Eigenschaften	397
7.4.2	Ein einfacher Unabhängigkeitsbeweis	402
7.5	Übungsaufgaben	409
	Literaturverzeichnis	417
	Bildnachweis	425
	Namensverzeichnis	427
	Sachwortverzeichnis	431