Grenzen der Mathematik

Dirk W. Hoffmann

Grenzen der Mathematik

Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik

2. Auflage

Springer Spektrum

Prof. Dr. Dirk W. Hoffmann
Hochschule Karlsruhe
Fakultät für Informatik und Wirtschaftsinformatik
Moltkestraße 30
76133 Karlsruhe

www.dirkwhoffmann.de

ISBN 978-3-642-34719-1 ISBN 978-3-642-34720-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-34720-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton
Redaktion: Dr. Michael Zillgitt
Satz: Autorensatz
Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Das Unmögliche zu erkennen, ist eine intellektuelle Leistung, die den Menschen einzigartig macht. In der Physik haben uns die Einstein'sche Relativitätstheorie oder die Heisenberg'sche Unschärferelation Grenzen aufgezeigt, die wir niemals überwinden werden. Die Aussagen sind negativ, und gerade deshalb verbreiten sie eine unwiderstehliche Faszination. Es ist das Unmögliche, das uns noch stärker zu fesseln vermag als das Mögliche.

Auch die Mathematik ist von ähnlichen Negativresultaten betroffen. Die mathematische Logik des zwanzigsten Jahrhunderts hat fundamentale Erkenntnisse hervorgebracht, die uns die Grenzen dieser präzisen Wissenschaft in aller Klarheit vor Augen führen. So wissen wir heute, dass sich der Begriff der Wahrheit selbst für so scheinbar einfache Theorien wie die Zahlentheorie nicht in Einklang mit dem Begriff der Beweisbarkeit bringen lässt. Es ist unmöglich, die Mathematik in einem formalen System einzufangen, in dem alle wahren mathematischen Aussagen bewiesen werden können.

Dieses Buch entführt Sie auf eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik. Es ist mein erklärtes Ziel, die Konzepte, Methoden und Ergebnisse dieser Disziplin in verständlicher Form offenzulegen, ohne einen Verlust an Tiefe zu erleiden. Wo immer es möglich ist, habe ich versucht, die Definitionen und Sätze mit Beispielen zu motivieren und durch zahlreiche Querbezüge in ihren sachlichen und historischen Kontext einzuordnen. Beweise von Sätzen, die nur am Rand eine Rolle spielen, sind bewusst nur skizzenhaft aufgenommen, oder es wird darauf hingewiesen, wo ein Beweis nachgeschlagen werden kann. In diesem Sinn kann das vorliegende Buch die formal präzise Literatur aus dem Bereich der mathematischen Logik nicht an jeder Stelle ersetzen – und will es auch gar nicht. Allem Anderen voran möchte ich die Faszination transportieren, die dieses Teilgebiet der Mathematik unzweifelhaft ausstrahlt. Sie, liebe Leser, müssen beurteilen, inwieweit mir dies gelungen ist.

Vorwort zur zweiten Auflage

Nach dem Erscheinen der Erstauflage habe ich eine Vielzahl an Zuschriften erhalten, für die ich mich an dieser Stelle herzlich bedanke. Die positive Resonanz hat mich in der Überzeugung bestärkt, einen didaktisch sinnvollen Ansatz gewählt zu haben.

Für die Neuauflage habe ich das ursprüngliche Manuskript an vielen Stellen geändert. Die meisten Neuerungen sind kleinerer Natur; sie korrigieren bekannte Fehler, die sich unbemerkt in die Erstauflage geschlichen hatten. Größere Änderungen hat das Herzstück dieses Buchs, das Kapitel *Beweistheorie*, erfahren. Neu hinzugekommen sind Abschnitte über das Diagonalisierungslemma, das Wahrheitsprädikat von Tarski, das Berry-Paradoxon und den Satz von Löb; all diese Themen wurden in der Erstauflage aus Platzgründen noch nicht behandelt. Ferner habe ich die Übungsteile mancher Kapitel um die eine oder andere neue Aufgabe ergänzt.

Ich möchte die Gelegenheit nutzen, Herrn Prof. Dr. Heiko Körner und Herrn Andreas Rychen meinen Dank auszusprechen. Ihre kritische Durchsicht der ersten Auflage hat dazu geführt, dass es zahlreiche kleinere und größere Fehler nicht in die zweite Auflage geschafft haben. Ebenso herzlich bedanke ich mich bei Herrn Dr. Andreas Rüdinger und Frau Bianca Alton vom Springer Verlag. Die gewohnt angenehme und kompetente Zusammenarbeit hat mir nicht nur bei diesem Buchprojekt viel Freude bereitet.

Kein Buch ist jemals perfekt! Für Hinweise zu Verbesserungsmöglichkeiten oder Fehlern bin ich jedem aufmerksamen Leser dankbar.

Karlsruhe, im Oktober 2012 — Dirk W. Hoffmann

Symbolwegweiser

Definition

Satz, Lemma, Korollar

Leichte Übungsaufgabe

Mittelschwere Übungsaufgabe

Schwere Übungsaufgabe

Lösungen zu den Übungsaufgaben

In wenigen Schritten erhalten Sie die Lösungen zu den Übungsaufgaben:

1. Gehen Sie auf die Webseite www.dirkwhoffmann.de/GM
2. Geben Sie den neben der Aufgabe abgedruckten Webcode ein.
3. Die Musterlösung wird als PDF-Dokument angezeigt.

Alternativ können Sie ein PDF-Dokument abrufen, das alle Musterlösungen gesammelt enthält.

Inhaltsverzeichnis