Teil II
Zur Durchführung des Hilbertprogramms

Das eigentliche „Kerngeschäft“ des Hilbertprogramms sind die Widerspruchsfreiheitsbeweise, die im Schritt (HP2b) gefordert werden. Im zweiten Teil dieser Arbeit geht es um die ersten Ansätze zu solchen Beweisen, wie sie von Hilbert, Bernays und ihrem Schülerkreis entwickelt wurden. Die genauere Analyse soll zeigen, wie das HP *in praxi* funktionierte, auf welche Weise die mit ihm verbundenen Ziele verfolgt wurden, wie sich diese Ziele im Laufe der Entwicklung verändert haben und welche konzeptionell-begrifflichen Probleme diese Veränderungen nach sich ziehen.

Das erste der vier Kapitel bringt eine ausführliche Analyse von Hilberts eigenen Ansätzen zu Widerspruchsfreiheitsbeweisen, die versucht, einen weiten Bogen zu spannen von den semantischen Reduktionen in den *Grundlagen der Geometrie*, über die ersten syntaktischen Ansätze, deren Wideraufnahme und Weiterentwicklung, bis zu dem vollentwickelten Konzept einer Beweistheorie in den Vorlesungen und Aufsätzen aus der Zeit um 1922. Das Kapitel setzt auch gleich ein mit einer Begründung dafür, daß Bernays hier kein eigenes Kapitel erhält (Kap. 9).

Das zweite Kapitel beschäftigt sich dann mit dem Widerspruchsfreiheitsbeweis Ackermanns aus dem Jahre 1924. Ackermanns Beweis wurde zwar nach einiger Zeit nicht mehr für schlüssig gehalten, was aber die immense Bedeutung seiner Arbeit kaum schmälert. Sie war die erste publizierte beweistheoretische Arbeit, die nicht aus Hilberts Feder stammt; in ihr zeigt sich zum ersten Mal „richtig“, was man mit Hilberts Idee der Epsilon-Substitution machen kann; sie hat die bis heute andauernde Fortentwicklung dieser Methode angestoßen; und: in ihr treten zum ersten Mal transfinite Ordinalzahlen in die Welt der Beweistheorie ein. Die historische Bedeutung von Ackermanns Arbeit schlägt sich in den letzten Jahren auch in einem verstärkten Forschungsinteresse an ihr nieder, zum Beispiel in den Arbeiten von Richard Zach, mit dessen Ergebnissen ein kritischer Abgleich erfolgen soll (Kap. 10).

Das kurze dritte Kapitel behandelt einen Äquivalenzbeweis für zwei Systeme der Zahlentheorie, ein intuitionistisches und ein klassisches, der um 1930 unabhängig von Kurt

Gödel und Gerhard Gentzen gefunden wurde. Es wird zu fragen sein, wie dieses Resultat im Hinblick auf die intuitionistische Kritik an der klassischen Logik zu deuten ist (Kap. 11).

Das vierte und letzte Kapitel schließlich ist dem wirkungsgeschichtlich folgenreichsten Widerspruchsfreiheitsbeweis gewidmet, den Gerhard Gentzen 1936 veröffentlicht hat. Der Analyse wird besonders die erste und ursprünglich nicht veröffentlichte Version des Beweises zugrundegelegt. Gentzens Beweis stellt nicht nur eine maßgebliche Weiterentwicklung der technischen Methoden der Beweistheorie dar, es ist vor allem der erste korrekte Widerspruchsfreiheitsbeweis für die volle Zahlentheorie mit Induktion. Die von Gentzen zu diesem Zweck benutzte Methode der Transfiniten Induktion bis zur Ordinalzahl ε_0 markiert mit der bewußten Verwendung eines transfiniten Induktionsprinzips auf der Metaebene den Übergang zu einer neuen, nach-Gödelschen Phase der Beweistheorie und wurde zur Keimzelle für die bis heute erfolgreich betriebene Methode der beweistheoretischen Ordinalzahlanalyse (Kap. 12).