Mathematik im Kontext

Herausgeber:
David E. Rowe
Klaus Volkert

In der Reihe „Mathematik im Kontext“
sind bisher erschienen:
F. Böttcher:
Das mathematische und naturphilosophische Lernen und Arbeiten der Marquise du Châtelet (1706–1749)
M. Audin:
Jaques Feldbau, Topologe
M.R. Schneider:
Zwischen zwei Disziplinen. B.L. van der Waerden und die Entwicklung der Quantenmechanik
A.-M. Décaillot:
Cantor und die Franzosen. Mathematik, Philosophie und das Unendliche

Christian Tapp

An den Grenzen des Endlichen

Das Hilbertprogramm im Kontext von Formalismus und Finitismus

Springer Spektrum

Christian Tapp
Ruhr-Universität Bochum
Bochum, Deutschland

ISSN 2191-074X
ISBN 978-3-642-29653-6
DOI 10.1007/978-3-642-29654-3
ISSN 2191-0758 (electronic)
ISBN 978-3-642-29654-3 (eBook)

Mathematics Subject Classification (2010): 00A30, 00A35, 00A07, 01-02, 01A60, 01A72, 03-02, 03-03, 03A05, 03F03, 03F05, 03F07, 03F25, 03F40, 03F55

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Einbandentwurf: deblik

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer.com

Für Marcus und Johannes

Vorwort

David Hilbert (1862–1943) entwickelte Anfang des 20. Jahrhunderts die Beweistheorie, um die Grundlagenprobleme von Mathematik und Logik „ein für allemal" zu lösen. Sein „Hilbertprogramm" war als ein Forschungsprogramm mit eminent philosophischen Absichten konzipiert: Ausgehend von ganz grundlegenden Prinzipien sollte der Erkenntnisanspruch der Mathematik gerechtfertigt und die Mathematik als Wissenschaft auf ein festes Fundament gestellt werden. Dazu sollten die Grundlagenfragen der philosophischen Diskussion entzogen und mit den präzisen Mitteln von Mathematik und Logik „ein für allemal" beantwortet werden.

Nach landläufiger Meinung hat sich mit den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen herausgestellt, daß diese Ziele nicht erreichbar sind. Hilberts formalistische Philosophie der Mathematik besitzt überhaupt kaum Tragfähigkeit und das eigentliche Hilbertprogramm ist so tot wie sein Entwickler. Die Beweistheorie konnte ihre großen Erfolge nur dadurch erwirtschaften, daß sie sich von den fruchtlosen philosophischen Auseinandersetzungen ihrer „Gründerzeit" verabschiedet und zu einer rein mathematischen Disziplin entwickelt hat.

In dieser Sichtweise sind Wahrheit und Irrtum so miteinander vermischt, daß es kaum möglich scheint, ihr kurz und bündig eine Alternative entgegenzusetzen. Die vorliegende Arbeit will daher insgesamt ein Ansatz zu einer solchen Alternative sein. Sie will die philosophische Suche nach einem tieferen Verständnis von Hilberts Programm, seiner Konzeption von Axiomatik, seinem Formalismus und seinem Finitismus einen Schritt voranbringen. Daß diese Suche nicht nur in Bezug auf Hilberts Standpunkt, sondern auch auf die Grundlagen der Mathematik überhaupt bis heute sehr lebendig ist, zeigt, daß auf diesem Terrain noch lange nicht alle philosophischen Fragen „ein für allemal" erledigt sind.

Im Gegenteil hat gerade das Hilbertprogramm selbst eine ganze Reihe neuer Fragen aufgeworfen. Welche Implikationen haben denn genau die Gödelsätze für das Hilbertprogramm? Wie sind die Grenzen des Finitismus abzustecken? Verlangt ein solches Programm, eine formalistische Philosophie der Mathematik zu vertreten? Hat Hilbert wider bessere Einsicht an seinem Programm geklammert oder ist seine Position rational doch tragfähiger, als seine Gegner und auch manche seiner Freunde zugestehen wollen?

Das vorliegende Buch will zu diesem Fragenkreis eine eigene Perspektive anbieten, die nicht nur in sich möglichst kohärent sein soll, sondern zugleich auch den Leistungen

Hilberts und seiner Schüler angemessen, und das kann nur heißen: ihren philosophisch-grundlagentheoretischen Standpunkten gegenüber so adäquat wie möglich und so kritisch wie nötig. Die erkenntnistheoretischen und wissenschaftsphilosophischen Fragenstränge werden daher verwoben mit dem Versuch einer sorgfältigen Interpretation der historischen Quellen. Bei der Auseinandersetzung mit Problemen und Positionen, die nicht nur *ad hoc* erdacht, sondern auch tatsächlich vertreten wurden, ist eine gewisse problemgeschichtliche Perspektive unabdingbar. Wer historische Angemessenheit bei philosophischem Arbeiten für überflüssig oder gar störend hält, der wird bei komplexeren Zusammenhängen kaum der Gefahr entgehen, seine Fragen nur deshalb so elegant, so „rein sachlich" und so „rein systematisch" beantworten zu können, weil er sie passend konstruiert hat. Will man sich hingegen tatsächlich mit „großen Gedanken" auseinandersetzen, sich von ihnen anregen und herausfordern lassen, muß die erste Devise sein, diese Gedanken so gut wie möglich zu begreifen. Schließlich gilt auch in der Wissenschaftsphilosophie, was Martin Heidegger im Kontext der Metaphysik einmal allgemein so formuliert hat:

> Die Erledigung der philosophiehistorischen Aufgaben „wird der rein philosophischen Ausdeutung die lebendige besondere Gestaltung und Fülle geben, die nun einmal aus der tiefer gefaßten Geschichte immer entspringt." HEIDEGGER, *Duns Scotus* [1916], 16

Die sachliche Auseinandersetzung mit einem historisch gewachsenen Problemkreis weiß sich unter mehr Ansprüche gestellt als Arbeiten, die sich einzig der sachlichen und fachinternen Auseinandersetzung mit einem Problem stellen. Sie ist der Gefahr ausgesetzt, daß der Kritiker das *Principle of Charity* vergißt und in der disziplinübergreifenden Breite logischer, erkenntnistheoretischer, wissenschaftsphilosophischer und -historischer Fragen reichlich Angriffsfläche findet. Aus einer ähnlichen Diagnose zog der Philosoph, Logiker und Mathematiker Gottlob Frege schon 1893 in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* in gewohnter Deutlichkeit und Schärfe den Schluß:

> Es „müssen alle Mathematiker aufgegeben werden, die beim Aufstossen von logischen Ausdrücken, wie ‚Begriff', ‚Beziehung', ‚Urteil' denken: *metaphysica sunt, non leguntur!* und ebenso die Philosophen, die beim Anblicke einer Formel ausrufen: *mathematica sunt, non leguntur!*" FREGE, *Grundgesetze* [1893], xii

Dem bleiben nur noch diejenigen hinzuzufügen, die zu Studien über verstorbene Denker sagen: *historica sunt, non leguntur!*

Dank gebührt entsprechend allen, die diese Arbeit trotzdem lesen. Er galt in erster Linie den Professoren Carlos Ulises Moulines, Godehard Link und Karl-Georg Niebergall, die die Mühe der Begutachtung auf sich genommen haben. Außerdem vielen Freunden und Kollegen für ihre freundschaftliche Unterstützung und für bereichernde Diskussionen. Besonders erwähnen möchte ich von meinen akademischen Lehrern Justus Diller, Godehard Link, Karl-Georg Niebergall, Wolfram Pohlers, Rosemarie Rheinwald (†) und Wilfried Sieg. Viel von ihren Anregungen ist in diese Arbeit eingeflossen. Meine Forschungsarbeiten wurden finanziert u. a. durch eine Stelle im Rahmen eines DFG-Projekts zur Geschichte der Beweistheorie (Dank an Menso Folkerts und Godehard Link) und durch ein Forschungsstipendium der Fritz-Thyssen-Stiftung. Zu danken habe ich auch meiner Ehefrau Stephanie für Vieles, das hier weder aufgezählt werden kann noch soll.

Die Fakultät für Philosophie, Wissenschaftstheorie und Religionswissenschaft der LMU München hat die Arbeit im Wintersemester 2006/2007 als Dissertation angenommen. Sie wurde in der damaligen Fassung online publiziert.

Wenn sie nun in überarbeiteter Form als Buch einer breiteren wissenschaftlichen Öffentlichkeit zugänglich gemacht wird, verdankt sich dies dem Zuspruch einer Reihe von Freunden und Kollegen, besonders von Matthias Wille. Das Erscheinen wurde erheblich erleichtert durch die freundliche Aufnahme in die Reihe „Mathematik im Kontext" des Springer-Verlags, wofür ich dem Verlag, v. a. dem Programmleiter Clemens Heine, sowie den beiden Reihenherausgebern Klaus Volkert und David E. Rowe sehr verbunden bin. Aufgrund meiner derzeitigen Arbeitsbelastung mußte ich auf neuerliche Literaturrecherchen verzichten. Der Stand der Dinge ist inhaltlich daher im Wesentlichen derjenige von Ende 2006, als das Manuskript abgeschlossen wurde. Ich hoffe, daß das Buch auch so für den am Hilbertprogramm interessierten Leser gewinnbringend genug sein wird.

Ein besonderer Dank gilt Sebastian Paasch, Helmut Pulte und ganz besonders Wolfram Pohlers für die Durchsicht der Endfassung und eine Reihe hilfreicher Kommentare. Für etwaige Fehler und Ungenauigkeiten bleibe ich allein selbst verantwortlich.

Diese Arbeit ist und bleibt meinen beiden Brüdern, Marcus und Johannes, gewidmet, ohne deren kontinuierliche Ermutigung vor vielen Jahren sie nicht entstanden wäre.

Bochum, im September 2012 Christian Tapp

Inhaltsverzeichnis